超低速から超音速まで適応できる三次元凝縮計算コードの開発

東北大学大学院航空宇宙工学専攻 山本 悟

1. はじめに

地球上の大気には、有限の水蒸気が含まれており、大気循環、雲や雨の形成に重要な役割を果たしている。さらに自然現象の中でも、たとえば竜巻や台風などは地球規模の渦を形成し、かつ渦中に凝縮（雲）を観察することができる。水蒸気は凝縮すると潜熱を放出する。この潜熱が自然現象に多大なる影響を与えていることが示唆されるが、これら大規模渦への凝縮の影響については未だよくわかっていないし、数値計算例も見当たらない。流体機械内部ならびに航空機周りにおいても、凝縮により潜熱が放出される場合がある。蒸気タービンが前者、飛行機雲が後者の典型的な例として上げられる。航空機翼周りの凝縮現象は、これまで風洞実験を中心に行われている。この場合、超音速域の急激な空気の膨張に伴って、大気中の水蒸気の過度の過冷却状態により発生した、いわゆる非平衡凝縮、またそれに伴って発生する凝縮衝撃波の観察が主となっている。風洞内における凝縮は、風洞スケールによる制約から均一核生成に支配されていることが知られている。均一核生成は、固有の核を持たない純粋な水蒸気のみによる凝縮の初生を支配しており、相対湿度が 100 %をはるかに超えないと凝縮しない。しかしながら、いったん凝縮が始まると凝縮核は急激に成長する。したがって、均一核生成による凝縮は、流れの条件に極めて敏感であることが示唆される。一方、実際の航空機翼周りに発生する凝縮は、不均一核生成により支配されていることがすでに知られている。この場合、ある固有の物質が核となり凝縮の初生を支配している。たとえば、大気中のすす、NOx、SOx やこれらから化学反応により生成された硝酸・硫酸エアロゾルなどの微小な浮遊粒子が核となり、その核の周りに凝縮による液相が生成される。これらによる凝縮の初生はそれぞれ異なってくることが予想されるが、不均一核生成のメカニズム自体いまだほとんど解明されていない。いずれにせよ、風洞内で実験された均一核生成が支配的な非平衡凝縮が、実際の凝縮と異なってくることから、風洞実験による航空機翼周りの正確な凝縮の計測には限界があると考えられる。

水蒸気もしくは湿度を考慮した高速風洞やノズル内流れの研究は、Wegener and Mack[1], Jordan[2], Hall[3], Schnerr and Dohrmann[4][5], White and Young[6], Adam and Schnerr[7] らにより報告されている。風洞やノズル内流れにおいては、均一核生成ならびに非平衡凝縮が支配的であるとされ、凝縮に伴い放出される潜熱による急激な温度上昇から、圧力も上昇し、非平衡凝縮特有のいわゆる凝縮衝撃波が発生することが知られている。

Bakhtar and Mohammadi Tochai[8], Moheban and Young[9], Young[10], Bakhtar, Ebrahimi and Webb[11] らは凝縮を伴う遷音速蒸気タービン翼列流れの研究を報告した。前三者のグループでは、流れはオイラー方程式を解いて求め、均一核生成に伴って発生した液滴の成長は、流れの流線に沿って積分することにより求められた。一方、Schnerr らのグループ [4][5][7] では、凝縮液滴の成長は微分方程式で近似的に記述され時間進行法によりオイラー方程式と連立して解かれた。Ishizaka ら [12] は、気液二相流中を伝播する音速を新たに定式化し、高解像差分スキームを用いて蒸気タービン翼列の非定常遷音速粘性流れを計算した。液滴の成長は、液滴の数密度を関数にした式で近似され、さらにこの数密度を未知変数とした保存式がナビエ・ストークス方程式と同時に時間進行法により解かれた。

一方、航空機周りの凝縮、いわゆる飛行機雲の研究については、Campbell ら [13] が、各種飛行機雲の写真を集めて論文として発表している。航空機の性能という点から見ると、飛行機雲の発生はあまり好ましくなく、揚抗比の減少や不安定振動の原因であることもすでに知られていることである。航空機翼周りの流れの数値計算はすでに数多く行われており、三次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式が一般

的に解かれている。しかしながら、そのほとんどが乾燥空気を仮定しており、いわゆる相対湿度 0% の空気が対象となっていることになる。したがって、たとえば上記のような高湿度中を航行する航空機周りの流れを正確に計算することはできない。

航空機翼周りに発生する非平衡凝縮は、Schnerr らのグループ [4][5] が、非粘性ならびに風洞環境を仮定して数値計算している。また、Iriya ら [14] は、NACA0012 翼周りの二次元遷音速粘性流れを、また Yamamoto ら [15] は、ONERA M6 翼周りの三次元遷音速粘性流れを風洞環境を仮定して数値計算し、さらに、風洞環境のみならず不均一核生成が支配的な実際の大気環境条件を模擬してデルタ翼周りに発生する大規模渦中の凝縮を数値計算し、凝縮の初生がこれら条件や主流の速度を変化させることによりどのような影響を受けるのかについて比較検討している [16]。

本資料にはまず、これまでに開発してきた非平衡凝縮を伴った流れを数値計算するための基礎方程式ならびに数値解法を示す。さらに、本計算コードを非圧縮性流れにも適用できるよう前処理法 (Preconditioning method) の導入についても紹介する。

主な記号

c	:	音速
e	:	単位体積当たりの岐点内部エネルギ
	:	$= \rho(\epsilon + v^2/2 - \omega r v_u)$
g_{ij}	:	測度 $= \nabla\xi_i \cdot \nabla\xi_j$
I	:	単位行列
J	:	ヤコビアン
K	:	熱伝導率
n	:	液滴の数密度
p	:	静圧
Re	:	レイノルズ数
r	:	平均液滴半径
T	:	静温度
$\boldsymbol{u}$	:	絶対速度ベクトル $=\boldsymbol{W} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
v_u	:	絶対速度の周方向成分
W_i	:	相対流れの反変速度成分
$\boldsymbol{w}$	:	相対速度ベクトル
w_i	:	相対速度のデカルト座標成分
β	:	液相の質量分率
Γ	:	液相の質量生成率
γ	:	比熱比
Δt	:	時間間隔
ϵ	:	比内部エネルギ
μ	:	分子粘性係数
ξ_i	:	一般曲線座標系
ρ	:	密度
τ_{ij}	:	粘性応力テンソルのデカルト座標成分
添字		
a	:	乾燥空気
v	:	蒸気
g	:	気相
ℓ	:	液相
m	:	二相流体
s	:	飽和状態
n	:	n 時間ステップ
$+,-$	:	正または負の方向に伝播する波

2. 基礎方程式

非平衡凝縮を伴う圧縮性湿り空気流れの支配方程式には、均質流を仮定した質量、運動量、エネルギー保存式に、新たに蒸気の質量、液滴の質量および液滴の数密度の保存式が加えられる。また、乱流を考慮するために、低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを場合により導入する。さらに、動翼列流れを計算するためには遠心力/コリオリ力が考慮できる相対流れの座標系に変換した基礎方程式を解く必要がある。最終的に一般曲線座標系で表された相対座標系の三次元基礎方程式は次のように記述される。

$$\partial Q/\partial t + \mathcal{F}(\mathcal{Q}) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{Re}S + H = 0 \tag{1}$$

ただし

$$
Q = J\begin{bmatrix} \rho \\ \rho w_1 \\ \rho w_2 \\ \rho w_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho\varepsilon \\ \rho_v \\ \rho\beta \\ \rho n \end{bmatrix}, \quad F_i = J\begin{bmatrix} \rho W_i \\ \rho w_1 W_i + \partial\xi_i/\partial x_1 p \\ \rho w_2 W_i + \partial\xi_i/\partial x_2 p \\ \rho w_3 W_i + \partial\xi_i/\partial x_3 p \\ (e+p)W_i \\ \rho k W_i \\ \rho\varepsilon W_i \\ \rho_v W_i \\ \rho\beta W_i \\ \rho n W_i \end{bmatrix}
$$

$$
S = -J\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \\ \tau_{kj}u_k + K\partial T/\partial x_j \\ \sigma_{kj} \\ \sigma_{\varepsilon j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = -J\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho(\omega^2 x_2 + 2\omega w_3) \\ \rho(\omega^2 x_3 - 2\omega w_2) \\ 0 \\ f_k \\ f_\varepsilon \\ -\Gamma \\ \Gamma \\ \rho I \end{bmatrix}
$$

変換のためのヤコビアン J、相対流れの反変速度成分 W_i、粘性応力テンソル τ_{ij} は、

$$
\begin{aligned}
J &= \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\
W_i &= (\partial\xi_i/\partial x_j)w_j \quad (i = 1, 2, 3) \\
\tau_{ij} &= (\mu + \mu_t)[(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial w_k}{\partial x_k}] - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k Re \quad (i, j = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

$k-\varepsilon$ モデルにおける $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, f_k, f_\varepsilon$ ならびに渦粘性係数 μ_t は以下のように定義される [17]。

$$
\begin{aligned}
\sigma_k &= (\mu + \mu_t/C_k)\partial k/\partial\xi_j, \quad \sigma_\varepsilon = (\mu + \mu_t/C_\varepsilon)\partial\varepsilon/\partial\xi_j \\
f_k &= (P - \rho\varepsilon Re - 2\mu k/d^2)/Re, \quad f_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon}(C_1 f_1 P - C_2 f_2 \rho\varepsilon Re - 2C_3\mu k/d^2)/Re \\
\mu_t &= Re \cdot C_\mu f_\mu \rho k^2/\varepsilon
\end{aligned}
$$

3. 湿り空気の状態方程式と音速

高速の湿り空気流れ、もしくは蒸気タービン内の湿り蒸気流れでは、$\beta < 0.1$ であると仮定できる。本研究では、この仮定に基づき近似した次式の状態方程式を用いる [12]。

$$
\begin{aligned}
p &= \rho RT(1-\beta) \\
&= \frac{(1-\beta)R}{C_{pm} - (1-\beta)R}(e - \frac{1}{2}\rho(w_i w_i - r^2\omega v_u) - \rho h_{0m}) \qquad (2) \\
R &= (\frac{\rho_a R_u}{\rho_g M_a} + \frac{\rho_v R_u}{\rho_g M_v})
\end{aligned}
$$

ここで、ρ_a、ρ_v および ρ_g はそれぞれ、乾燥空気、蒸気および気相の密度、R_u、M_a および M_v は、Universal Gas Constant、空気の分子量、蒸気の分子量である。C_{pm} ならびに h_{0m} は、水と気相の定圧比熱ならびに生成エンタルピーを質量分率 β で次式のように線形結合することにより求められる。

$$
\begin{aligned}
C_{pm} &= \beta C_{p\ell} + (1-\beta)C_{pg} \\
h_{0m} &= \beta h_{0\ell} + (1-\beta)h_{0g}
\end{aligned}
$$

また湿り空気の密度は液相の質量分率 β を用いれば、

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1-\beta}{\rho_g}+\frac{\beta}{\rho_\ell}$$

もしくはボイド率 α を用いれば、

$$\rho=\alpha\rho_g+(1-\alpha)\rho_\ell$$

音速は次式のように近似される。

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{(1-\beta)R}{C_{pm}-(1-\beta)R}C_{pm}T \\ &= \frac{C_{pm}}{C_{pm}-(1-\beta)R}\ \frac{p}{\rho} \end{aligned} \tag{3}$$

また、粘性係数 μ も水と気相の粘性係数 μ_ℓ,μ_g をボイド率 α により線形結合した次式を用いる。

$$\mu=\alpha\mu_g+(1-\alpha)\mu_\ell$$

4. 非平衡凝縮モデル

非平衡凝縮における液相の質量生成率 Γ は、古典凝縮論に基づいて、凝縮核生成と液滴の成長による質量増加の和で表される。さらに石坂らは液滴の成長を液滴の数密度を関数にした式で近似した [12]。すなわち、

$$\Gamma=\frac{4}{3}\pi\rho_\ell I r_*^3+4\pi\rho_\ell n r^2\frac{dr}{dt} \tag{4}$$

ここで、I は均一核生成に伴う凝縮核生成率で、Frenkel[18] により定式化された次式を用いる。

$$I = q_c(\frac{2\sigma}{\pi m^3})^{1/2}\frac{\rho_g^2}{\rho_\ell}\exp(-\frac{4\pi r_*^2\sigma}{3kT}) \tag{5}$$

ただし、q_c、σ、m、ならびに k はそれぞれ、凝縮係数、液滴の表面張力、水の分子量、そしてボルツマン定数。r_* は Kelvin-Helmholtz の凝縮核臨界半径で次式により計算する。

$$r_* = \frac{2\sigma}{\rho_\ell RT\ln(s)}$$

ここで、$s = p/p_s(T)$ は過飽和蒸気圧率で、$p_s(T)$ は飽和蒸気圧。1 個の液滴の成長率 dr/dt は Hertz-Knudsen モデルにより与える。

5. 高解像差分スキーム

基礎方程式 (1) についても、既存の差分スキームをほぼそのまま適用することができると言える。むしろ、理想気体の場合同様に、タービン静動翼列流れのような非定常空力干渉を伴う流れ問題を精度良く数値解析するためには、離散化の精度をできるだけ上げる必要がある。ここでは、非定常衝撃波干渉流れを捕獲するために著者らが提案している高解像差分スキームを用いて基礎方程式 (1) を離散化する方法を紹介する。この方法は以下の組み合わせから構成される。

1) 未知変数の高次補間に 4 次精度 Compact MUSCL TVD(4thCM) スキーム [19]。
2) 対流項の離散化に修正流束分離法もしくは流束差分離法 [20]。
3) 時間積分に時間最大 2 次精度の対角化近似因子化法 [21] もしくは LU-SGS スキーム [22]。

5.1 修正流束分離法

ここで用いる流束分離法は、Steger-Warming FVS[23] に基づく方法で、境界層の計算が精度良くできるよう著者らが改良したものである。まず、一般曲線座標系で表された圧縮性ナビエ・ストークス方程式の対流項、すなわち流束ベクトルは次のような数値流束に離散化される。

$$(F_i)_{\ell+1/2}=(A_i^+)_{\ell+1/2}Q^L_{\ell+1/2}+(A_i^-)_{\ell+1/2}Q^R_{\ell+1/2} \tag{6}$$

ここで、$A_i^{\pm}(i=1,2,3)$ はヤコビ行列で、特性速度 (固有値) の符号により分離される。$Q^{L(R)}$ は 4thCM スキームにより物理変数が外挿される。最終的に $(A_i^{\pm})_{\ell+1/2}Q^M$ は、次のようなサブベクトルの和で記述される。

$$(A_i^{\pm})_{\ell+1/2}Q^M = \bar{\lambda}_{i1}^{\pm}Q^M + \frac{\bar{\lambda}_{ia}^{\pm}}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}}\bar{Q}_{ia} + \frac{\bar{\lambda}_{ib}^{\pm}}{\bar{c}^2}\bar{Q}_{ib} \tag{7}$$

ただし、M は $A=A^{+(-)}$ で $L(R)$ を意味し、

$$\begin{aligned}
\lambda_{i1} &= W_i, \quad \lambda_{i4} = W_i + c\sqrt{g_{ii}}, \quad \lambda_{i5} = W_i - c\sqrt{g_{ii}} \\
\lambda_{ia}^{\pm} &= \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^{\pm} - \lambda_{i5}^{\pm}), \quad \lambda_{ib}^{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^{\pm} + \lambda_{i5}^{\pm}) - \lambda_{i1}^{\pm}
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{ia} &= \bar{p}\bar{Q}_{ic} + \Delta\bar{m}_i\bar{Q}_d, \quad \bar{Q}_{ib} = (\Delta\bar{m}_i\ \bar{c}^2/g_{ii})\bar{Q}_{ic} + \bar{p}\bar{Q}_d \\
\bar{p} &= \bar{Q}_p \cdot Q^M \quad \Delta\bar{m}_i = \bar{Q}_{im} \cdot Q^M
\end{aligned}$$

$$Q_{ic} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial\xi_i/\partial x_1 \\ \partial\xi_i/\partial x_2 \\ \partial\xi_i/\partial x_3 \\ W_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_d = \begin{bmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ H \\ k \\ \varepsilon \\ \rho_v/\rho \\ \beta \\ n \end{bmatrix}, \quad Q_p = \begin{bmatrix} \phi^2 \\ -\tilde{\gamma}w_1 \\ -\tilde{\gamma}w_2 \\ -\tilde{\gamma}w_3 \\ \tilde{\gamma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{im} = \begin{bmatrix} -W_i \\ \partial\xi_i/\partial x_1 \\ \partial\xi_i/\partial x_2 \\ \partial\xi_i/\partial x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H=(e+p)/\rho$, $\phi^2 = w_iw_i/2$, $\tilde{\gamma}=\gamma-1$。オーバーラインの付いた変数には平均化操作がなされる。

5.2 流束差分離法

Roe の近似リーマン解法 [24] に基づく流束差分離法をベクトル形で導出すると、数値流束 $(F_i)_{\ell+1/2}$ は次式で表される。

$$(F_i)_{\ell+1/2} = \frac{1}{2}[F_i(Q_{\ell+1/2}^L) + F_i(Q_{\ell+1/2}^R) - \mid (A_i)_{\ell+1/2} \mid (Q_{\ell+1/2}^R - Q_{\ell+1/2}^L)] \tag{8}$$

$\mid (A_i)_{\ell+1/2} \mid Q^M (i=1,2,3, M=L,R)$ は Roe 平均を施して次式で計算される。

$$\mid (A_i)_{\ell+1/2} \mid Q^M = \mid \bar{\lambda}_{i1} \mid Q^M + \frac{\mid \bar{\lambda}_{ia} \mid}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}}\bar{Q}_{ia} + \frac{\mid \bar{\lambda}_{ib} \mid}{\bar{c}^2}\bar{Q}_{ib} \tag{9}$$

ただし、

$$\mid \lambda_{ia} \mid = \frac{1}{2}(\mid \lambda_{i4} \mid - \mid \lambda_{i5} \mid), \quad \mid \lambda_{ib} \mid = \frac{1}{2}(\mid \lambda_{i4} \mid + \mid \lambda_{i5} \mid) - \mid \lambda_{i1} \mid$$

本研究で用いる修正流束分離法と流束差分離法は、基本的に Roe の近似リーマン解法に基づくように変形されているので、流束差分離法の中心差分の評価にもよるが、ほぼ同一の特徴を持った式となっている。

5.3 時間積分

5.3.1 対角化近似因子化法

時間方向最大 2 次精度に拡張された対角化近似因子化法に基づく時間積分スキームについて説明する。近似因子化、対角化、上流化が施されて導出された定常計算のための対角化近似因子化法に、ニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み込むことで時間最大 2 次精度に拡張できる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
[I+\theta_L\Delta t(\Lambda_1^+\nabla_1+\Lambda_1^-\Delta_1)]^m\Delta Q^{*m} &= -\Delta t(L_1N)^m RHS^m && (10)\\
[I+\theta_L\Delta t(\Lambda_2^+\nabla_2+\Lambda_2^-\Delta_2)]^m\Delta Q^{**m} &= (L_2L_1^{-1})^m\Delta Q^{*m} && (11)\\
[I+\theta_L\Delta t(\Lambda_3^+\nabla_3+\Lambda_3^-\Delta_3)]^m\Delta Q^{***m} &= (L_3L_2^{-1})^m\Delta Q^{**m} && (12)\\
\Delta Q^m &= (N^{-1}L_3^{-1})^m\Delta Q^{***m} && (13)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
\Delta Q^m &= Q^{m+1}-Q^m\\
RHS^m &= -(Q^m-Q^n)-\Delta t\{\mathcal{F}(Q^m)+\mathcal{F}(Q^n)\}/2
\end{aligned}
$$

$\theta_L=1/2$ もしくは 1。 ∇_i と Δ_i はそれぞれ前進、後退差分演算子である。$\mathcal{F}^*$ はナビエ・ストークス方程式の空間微分項 (粘性項も含む) の差分演算子。$L_i(i=1,2,3)$ は、非保存形表示された左固有ベクトルからなる行列、N は保存形から非保存形に変換するための行列。m はニュートン反復の回数で、$m=0$ のとき、$Q^m=Q^n$。もし $m\Rightarrow\infty$ ならば、$\Delta Q^m\Rightarrow 0$、すなわち $Q^m\Rightarrow Q^{n+1}$ で、時間最大 2 次精度の解を得ることができる。

5.3.2 LU-SGS スキーム

Yoon and Jameson により提案された LU-SGS スキーム [22] にニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み込むことで時間最大 2 次精度に拡張できる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
D\Delta Q^{*m} &= RHS^m+\theta_L\Delta t G^+(\Delta Q^{*m}) && (14)\\
\Delta Q^m &= \Delta Q^{*m}-D^{-1}\theta_L\Delta t G^-(\Delta Q^m) && (15)\\
G^+(\Delta Q^{*m}) &= (A_1^+\Delta Q^{*m})_{i-1,j,k}+(A_2^+\Delta Q^{*m})_{i,j-1,k}+(A_3^+\Delta Q^{*m})_{i,j,k-1} && (16)\\
G^-(\Delta Q^m) &= (A_1^-\Delta Q^m)_{i+1,j,k}+(A_2^-\Delta Q^m)_{i,j+1,k}+(A_3^-\Delta Q^m)_{i,j,k+1} && (17)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
D &= I+\theta_L\Delta t[r(A_1)+r(A_2)+r(A_3)]\\
r(A) &= \alpha\max[\lambda(A)]
\end{aligned}
$$

α は経験定数で、$\alpha\geq 1.0$。式 (16)(17) の右辺における非対角項の計算には、式 (7) を使用することができる。

6. 前処理法

6.1 流束分離式

非圧縮性流れの数値計算には、これまで MAC 法に基づく方法が一般的に使用されて、食い違い格子上で運動方程式から導出された圧力のポアソン方程式が解かれた。一方では、圧縮性流れの計算コードに擬似密度を導入した擬似圧縮性法なども使用されている。Choi and Merkle[25] は、擬似圧縮性法をさらに改良した前処理法を提案している。Weiss and Smith[26] は、この方法をさらに一般化した。ここでは、Weiss らの方法に忠実に一般座標系の三次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式の流束から導出された流束分離式を示す。

いま、$Q = J[\rho\ \ \rho w_1\ \ \rho w_2\ \ \rho w_3\ \ e\ \ q_s]^T$ とおく。ただし、$[q_6\ \ q_7\ \ q_8\ \ q_9\ \ q_{10}] = [\rho k\ \ \rho\varepsilon\ \ \rho_v\ \ \rho\beta\ \ \rho n]^T$ である。$\hat{Q} = J[p\ \ w_1\ \ w_2\ \ w_3\ \ T\ \ q_s/\rho]^T$ とおけば、前処理行列 Γ を用いて、前処理を施した式 (1) は次式のように変形される。

$$\Gamma\partial\hat{Q}/\partial t + \mathcal{F}(\hat{Q}) = \Gamma\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial\xi_i} + \frac{1}{Re}S + H = 0 \tag{18}$$

ただし、

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta w_1 & \rho & 0 & 0 & \rho_T w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta w_2 & 0 & \rho & 0 & \rho_T w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta w_3 & 0 & 0 & \rho & \rho_T w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta H - 1 & \rho w_1 & \rho w_2 & \rho w_3 & \rho_T H + \rho C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta k & 0 & 0 & 0 & \rho_T k & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta\varepsilon & 0 & 0 & 0 & \rho_T\varepsilon & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \theta\rho_v/\rho & 0 & 0 & 0 & \rho_T\rho_v/\rho & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \theta\beta & 0 & 0 & 0 & \rho_T\beta & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \theta n & 0 & 0 & 0 & \rho_T n & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

ただし、θ は前処理パラメータで、$\theta = (1/U_r^2 - \rho_T/\rho C_p)$ で定義される。Roe の近似リーマン解法に基づく流束差分離式をベクトル形で導出すると、数値流束 $(F_i)_{\ell+1/2}$ は次式で表される。

$$(F_i)_{\ell+1/2} \quad = \quad \frac{1}{2}[F_i(Q^L_{\ell+1/2}) + F_i(Q^R_{\ell+1/2}) - \mid(\hat{A}_i)_{\ell+1/2}\mid(\hat{Q}^R_{\ell+1/2} - \hat{Q}^L_{\ell+1/2})] \tag{19}$$

$\mid(\hat{A}_i)_{\ell+1/2}\mid\hat{Q}^M (i = 1, 2, 3, M = L, R)$ は流束分離形で次式のように導出される。

$$\mid(\hat{A}_i)_{\ell+1/2}\mid\hat{Q}^M \quad = \quad \mid\hat{\lambda}_{i1}\mid\Gamma\hat{Q}^M + \frac{\mid\hat{\lambda}_{ia}\mid}{\hat{c}_i\sqrt{g_{ii}}}\hat{Q}_{ia} + \frac{\mid\hat{\lambda}_{ib}\mid}{\hat{c}_i^2}\hat{Q}_{ib} \tag{20}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{i1} &= W_i \\ \hat{\lambda}_{i4} &= \frac{(1+\alpha)W_i}{2} + \hat{c}_i\sqrt{g_{ii}} \\ \hat{\lambda}_{i5} &= \frac{(1+\alpha)W_i}{2} - \hat{c}_i\sqrt{g_{ii}} \\ \mid\hat{\lambda}_{ia}\mid &= \frac{1}{2}(\mid\hat{\lambda}_{i4}\mid - \mid\hat{\lambda}_{i5}\mid), \quad \mid\hat{\lambda}_{ib}\mid = \frac{(\ell_i^- \mid\hat{\lambda}_{i4}\mid - \ell_i^+\mid\hat{\lambda}_{i5}\mid)}{\ell_i^- - \ell_i^+} - \mid\hat{\lambda}_{i1}\mid \\ \hat{c}_i &= \frac{1}{2}\sqrt{W_i^2(1-\alpha)^2/g_{ii} + 4U_r^2} \\ \ell_i^\pm &= \frac{\rho U_r^2}{W_i(\alpha-1)/2 \pm \hat{c}_i\sqrt{g_{ii}}} \\ \alpha &= U_r^2(\rho_p + \frac{\rho_T}{\rho C_p}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{ia} &= \hat{q}_1^M Q_{ic} + \rho\hat{W}_i Q_d \\ \hat{Q}_{ib} &= (\rho\hat{W}_i\hat{c}_i^2/g_{ii})Q_{ic} + (\hat{q}_1^M\hat{c}_i^2/U_r^2)Q_d \\ \hat{W}_i &= (\partial\xi_i/\partial x_j)\hat{q}_{j+1}^M\ (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Q_{ic}, Q_d は、式 (7) で使用しているものとまったく同じものが使用できる。

6.2 LU-SGS スキーム

LU-SGS スキームを前処理法に拡張する。式 (14)-(17) に基づき、式を変形すれば、

$$\Gamma D\Delta\hat{Q}^{*m} = RHS^m + \theta_L \Delta t G^+(\Delta\hat{Q}^{*m}) \quad (21)$$

$$\Delta\hat{Q}^m = \Delta\hat{Q}^{*m} - \Gamma^{-1}D^{-1}\theta_L\Delta t G^-(\Delta\hat{Q}^m) \quad (22)$$

$$G^+(\Delta\hat{Q}^{*m}) = (\hat{A}_1^+\Delta\hat{Q}^{*m})_{i-1,j,k} + (\hat{A}_2^+\Delta\hat{Q}^{*m})_{i,j-1,k} + (\hat{A}_3^+\Delta\hat{Q}^{*m})_{i,j,k-1} \quad (23)$$

$$G^-(\Delta\hat{Q}^m) = (\hat{A}_1^-\Delta\hat{Q}^m)_{i+1,j,k} + (\hat{A}_2^-\Delta\hat{Q}^m)_{i,j+1,k} + (\hat{A}_3^-\Delta\hat{Q}^m)_{i,j,k+1} \quad (24)$$

ただし、

$$D = I + \theta_L\Delta t[r(\hat{A}_1) + r(\hat{A}_2) + r(\hat{A}_3)]$$

$$r(\hat{A}) = \alpha\max[\lambda(\hat{A})]$$

$$RHS^m = -\Gamma(\hat{Q}^m - \hat{Q}^n) - \Delta t\{\mathcal{F}(Q^m) + \mathcal{F}(Q^n)\}/2$$

式 (23)(24) の右辺における非対角項の計算には、式 (20) を使用する。

文 献

1. Wegener, P. P. and Mack, L.M., "Condensation in Supersonic and Hypersonic Wind Tunnels," *Adv. Appl. Mech.*, **5**(1958), pp.307-447.
2. Jordan, F.L, "Investigation at Near-sonic Speed of Some Effects of Humidity on the Longitudinal Aerodynamic Characteristics of a NASA Supercritical Wing Research Airplane Model," NASA TM X-2618, (1972).
3. Hall, R.M, "Onset of Condensation Effects with an NACA 0012-64 Airfoil Tested in the Langley 0.3-meter Transonic Cryogenic Wind Tunnel Technology," NASA TP 1385, (1979).
4. Schnerr, G.H. and Dohrmann, U., "Transonic Flow Around Airfoils with Relaxation and Energy Supply by Homogeneous Condensation," *AIAA J.*, **28**(1990), pp.1187-1193.
5. Schnerr, G.H. and Dohrmann, U., "Drag and Lift in Nonadiabatic Transonic Flow," *AIAA J.*, **32** (1994), pp.101-107.
6. White, A.J. and Young, J.B, "A Time-marching Method for the Prediction of Two-dimensional, Unsteady Flows of Condensation Steam," *J. Propulsion and Power*, **9**(1993), pp.579-587.
7. Adam, S. and Schnerr, G.H., "Instabilities and Bifurcation of Non-equilibrium Two-phase Flows," *J. Fluid Mech.*, **348**(1997), pp.1-28.
8. Bakhtar, F. and Mohammadi Tochai, M.T., "An Investigation of Two-Dimensional Flows of Nucleating and Wet Steam by the Time-Marching Method," *Int. J. Heat & Fluid Flow*, **2**(1980), pp.5-18.
9. Moheban, M. and Young, J.B., "A Study of Thermal Nonequilibrium Effects in Low-Pressure Wet-Steam Turbines Using a Blade-to-Blade Time-Marching Technique," *Int. J. Heat & Fluid Flow*, **6**(1985), pp.269-278.
10. Young, J.B., "Two Dimensional, Nonequilibrium, Wet-Steam Calculations for Nozzles and Turbine Cascades," *Trans. ASME, J. Turbomachinery*, **114**(1992), pp.569-579.
11. Bakhtar, F., Ebrahimi, M. and Webb, R.A., "On the Performance of a Cascade of Turbine Rotor Tip Section Blading in Nucleating Steam. Part I: Surface Pressure Distributions," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, **209**(1995), pp.115-123.
12. Ishizaka, K, Ikohagi, T., and Daiguji, H., "A High-Resolution Finite Difference Scheme for Supersonic Wet-Stream Flows, *Trans. JSME, Series B*," **60**(1994), pp.3887-3892(in Japanese).

13. Campbell, J.F., Chambers, J.R. and Rumsey, C.L., "Observation of Airplane Flowfields by Natural Condensation Effects," *J. Aircraft*, **26**(1989), pp.593-604.
14. Iriya, A., Yamamoto, S. and Daiguji, H., "Numerical Method for Transonic Viscous Flow Considering Humidity," *Trans. JSME, Series B*, **62**(1996), pp.100-105(in Japanese).
15. Yamamoto, S., Hagari, H. and Murayama, M., "Numerical Simulation of Condensation around the 3-D Wing," *Trans. JSASS*, **42**(2000), pp.182-189.
16. Yamamoto, S., "Onset of Condensation in Vortical Flow over Sharg-edged Delta Wing," AIAA Paper 2001-2651, (2001).
17. Chien, K.Y., "Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model," *AIAA J.*, Vol.**23**(1982), p.1308.
18. Frenkel, J. Kinetic Theory of Liquids, (1955), Dover.
19. Yamamoto, S. and Daiguji, H., "Higher-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations," *Computers and Fluids*, **22**(1993), pp.259-270.
20. Yuan, X., Yamamoto, S. and Daiguji, H., "A Higher-Resolution Shock-Capturing Scheme for Simulating Unsteady Three-Dimensional Transonic Flows in Turbomachinery," AIAA Paper 94-3199, (1994).
21. Yamamoto, S. and Daiguji, H., "Computation of Unsteady Transonic Cascade Flow Using the Euler and Navier-Stokes Equations of Contravariant Velocities," *JSME Int. J., Series B*, Vol.37, (1994), pp.522-530.
22. Yoon, S. and Jameson, A., "Lower-upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations," *AIAA J.*, Vol.26, (1988), pp.1025-1026.
23. Steger, J.L. and Warming, R.F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-dynamic Equations with Application to Finite Difference Methods," *J. Comp. Phys.*, Vol.40, (1981), pp.263-293.
24. Roe, P.L., "Approximate Riemann Solver, Parameter Vector and Difference Schemes," *J. Comp. Phys.*, Vol.43, (1981), pp.357-372.
25. Choi, Y.-H. and Merkle, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *J. Comp. Phys.*, Vol.105, (1993), pp.207-223.
26. Weiss, J.M. and Smith, W.A., "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA J.*, Vol.33, (1995), pp.2050-2056.

Appendix:

$$
\hat{A}_i = \begin{bmatrix}
\rho_p W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho & \rho_T W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} + \rho_p w_1 W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho w_1 + \rho W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho w_1 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho w_1 & \rho_T w_1 W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} + \rho_p w_2 W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho w_2 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho w_2 + \rho W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho w_2 & \rho_T w_2 W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} + \rho_p w_3 W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho w_3 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho w_3 & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho w_3 + \rho W_i & \rho_T w_3 W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\rho_p H W_i & \rho w_1 W_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho H & \rho w_2 W_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho H & \rho w_3 W_i + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho H & \rho_T H W_i + \rho C_p W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\rho_p k W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho k & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho k & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho k & \rho_T k W_i & \rho W_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\rho_p \varepsilon W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho \varepsilon & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho \varepsilon & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho \varepsilon & \rho_T k W_i & 0 & \rho W_i & 0 & 0 & 0 \\
\rho_p (\rho_v/\rho) W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho_v & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho_v & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho_v & \rho_T (\rho_v/\rho) W_i & 0 & 0 & \rho W_i & 0 & 0 \\
\rho_p \beta W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho \beta & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho \beta & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho \beta & \rho_T \beta W_i & 0 & 0 & 0 & \rho W_i & 0 \\
\rho_p n W_i & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\rho n & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\rho n & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3}\rho n & \rho_T n W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho W_i
\end{bmatrix}
$$

$$
\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{\rho C_p + \rho_T C_p T - \rho_T \phi}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{w_1 \rho_T}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{w_2 \rho_T}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{w_3 \rho_T}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{-\rho_T}{\rho C_p \theta + \rho_T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-w_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-w_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-w_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1 + \phi\theta - C_p T \theta}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{-w_1 \theta}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{-w_2 \theta}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{-w_3 \theta}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{\theta}{\rho C_p \theta + \rho_T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\varepsilon/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\
-(\rho_v/\rho)/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\
-\beta/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\
-n/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho
\end{bmatrix}
$$

$$
\Gamma^{-1}\hat{A}_i = \begin{bmatrix}
\frac{(\rho C_p \rho_p + \rho_T) W_i}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_1)\rho^2 C_p}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_2)\rho^2 C_p}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_3)\rho^2 C_p}{\rho C_p \theta + \rho_T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} & W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} & 0 & W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} & 0 & 0 & W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{(\rho_p - \theta) W_i}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_1)\rho}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_2)\rho}{\rho C_p \theta + \rho_T} & \frac{(\partial \xi_i/\partial x_3)\rho}{\rho C_p \theta + \rho_T} & W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i
\end{bmatrix}
$$

$$\Gamma^{-1}\hat{A}_i = L_i^{-1}\Lambda_i L_i$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\rho C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\ell_1^+ & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\ell_1^+ & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\ell_1^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\ell_1^- & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\ell_1^- & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\ell_1^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\rho C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\ell_2^+ & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\ell_2^+ & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\ell_2^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3} & -\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\ell_2^- & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\ell_2^- & \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\ell_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\rho C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3} & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\ell_3^+ & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\ell_3^+ & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\ell_3^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\ell_3^- & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\ell_3^- & \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\ell_3^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_{31} \end{bmatrix}$$