2012.9.25
夏のターボセミナー　伊豆高原

圧縮性流れの数値解法

東北大学大学院情報科学研究科

山本 悟

講義の内容

・数値流体力学の歴史

・偏微分方程式の型の分類と特性の理論の適用

・1次元圧縮性オイラー方程式と特性の理論の適用

・流束分離と流束差分離

・リーマン解法とMUSCL補間

以前　1950　　1960　　1970

MAC法

Fractional-Step法

Simplified MAC法

Chorin(1968)

Amsden and Harlow (1970)

非圧縮性
粘性流れ

Richardson(1910)
Southwell(1940)
Von Naumann and Richitmyer(1950)

FDM

Godunov(1959)
Lax and Wendroff (1960)

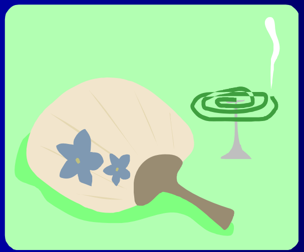
Harlow and Welch (1965)

MacCormack (1969)

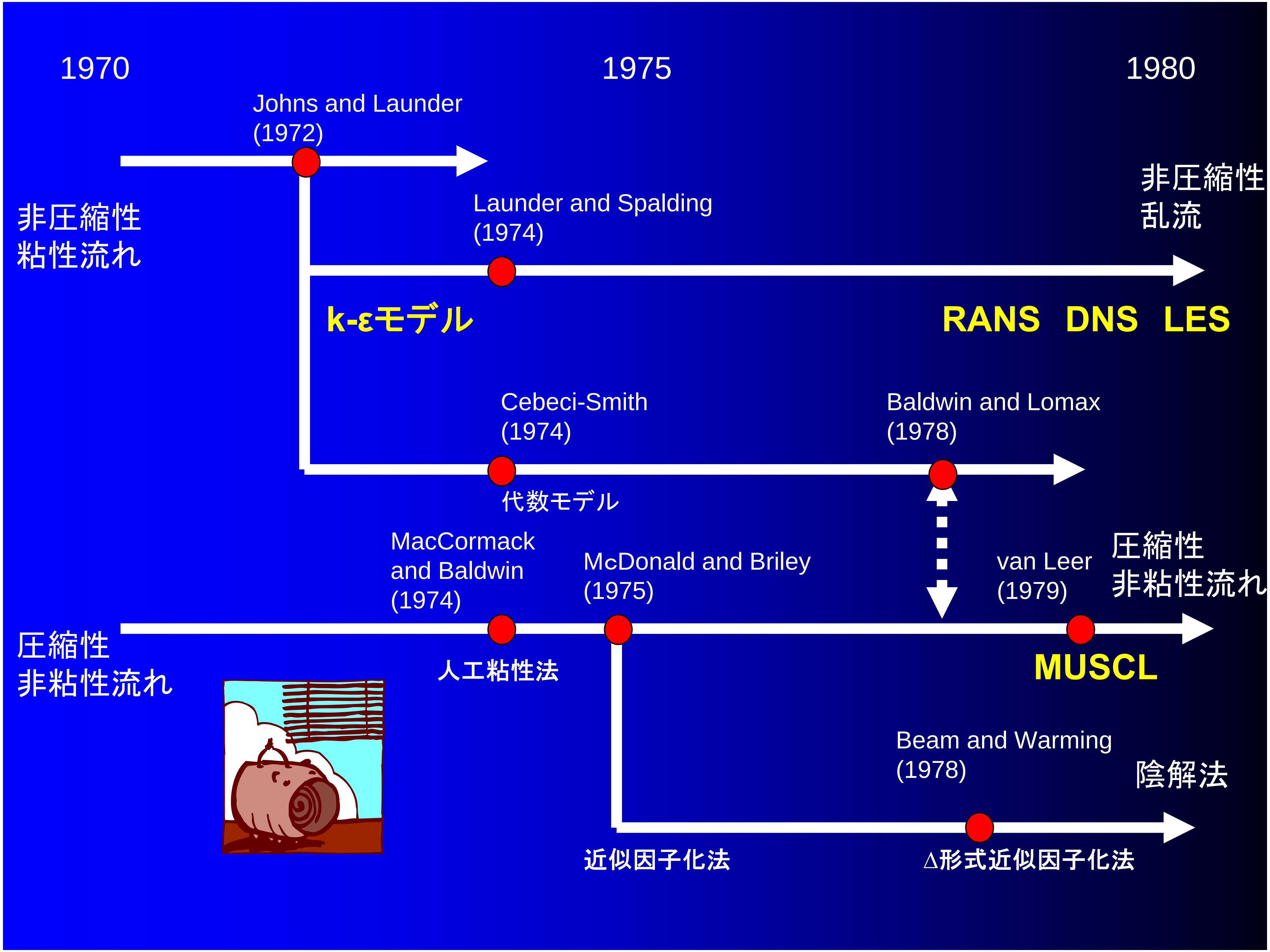
圧縮性
非粘性流れ

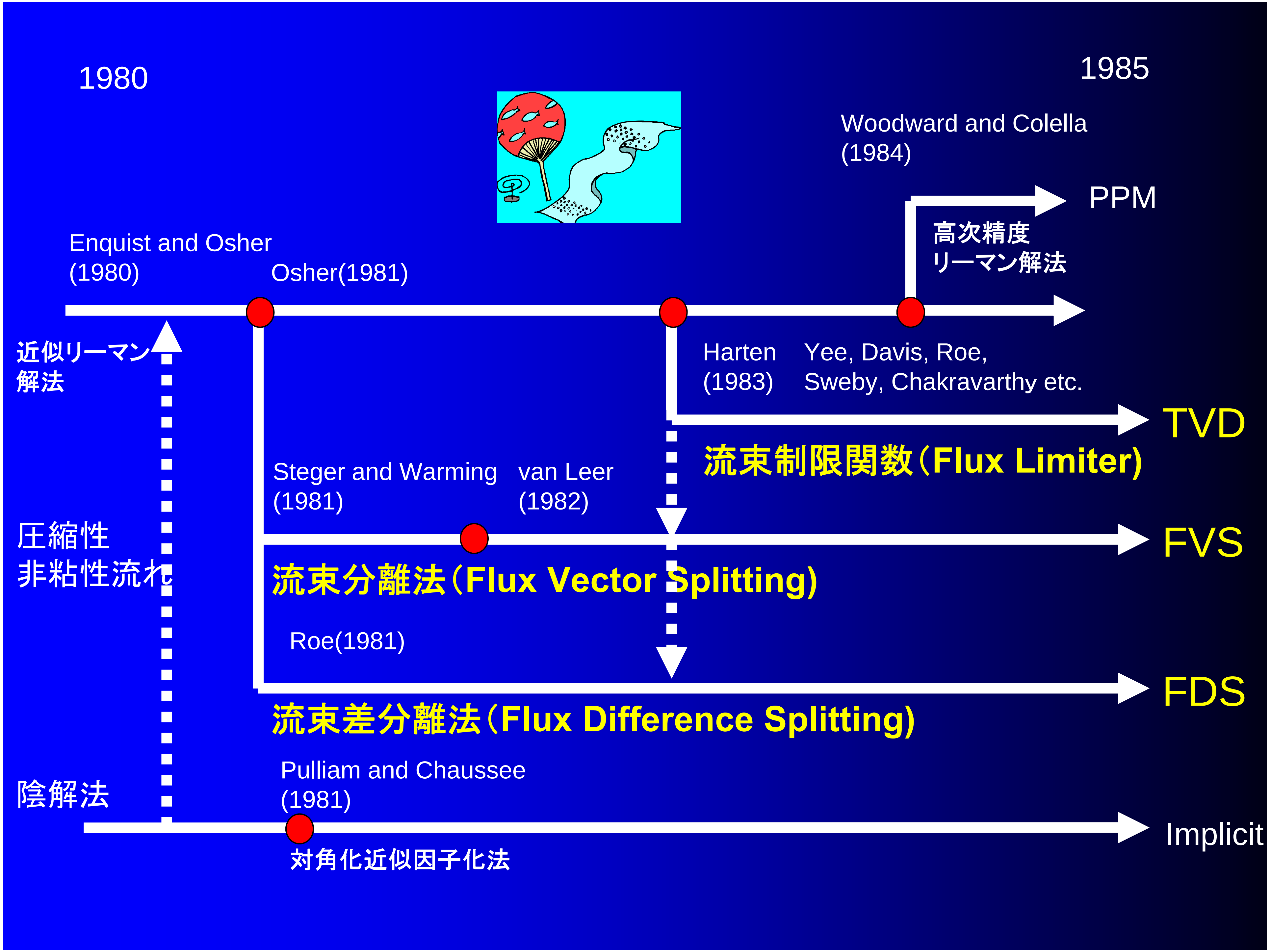
AM

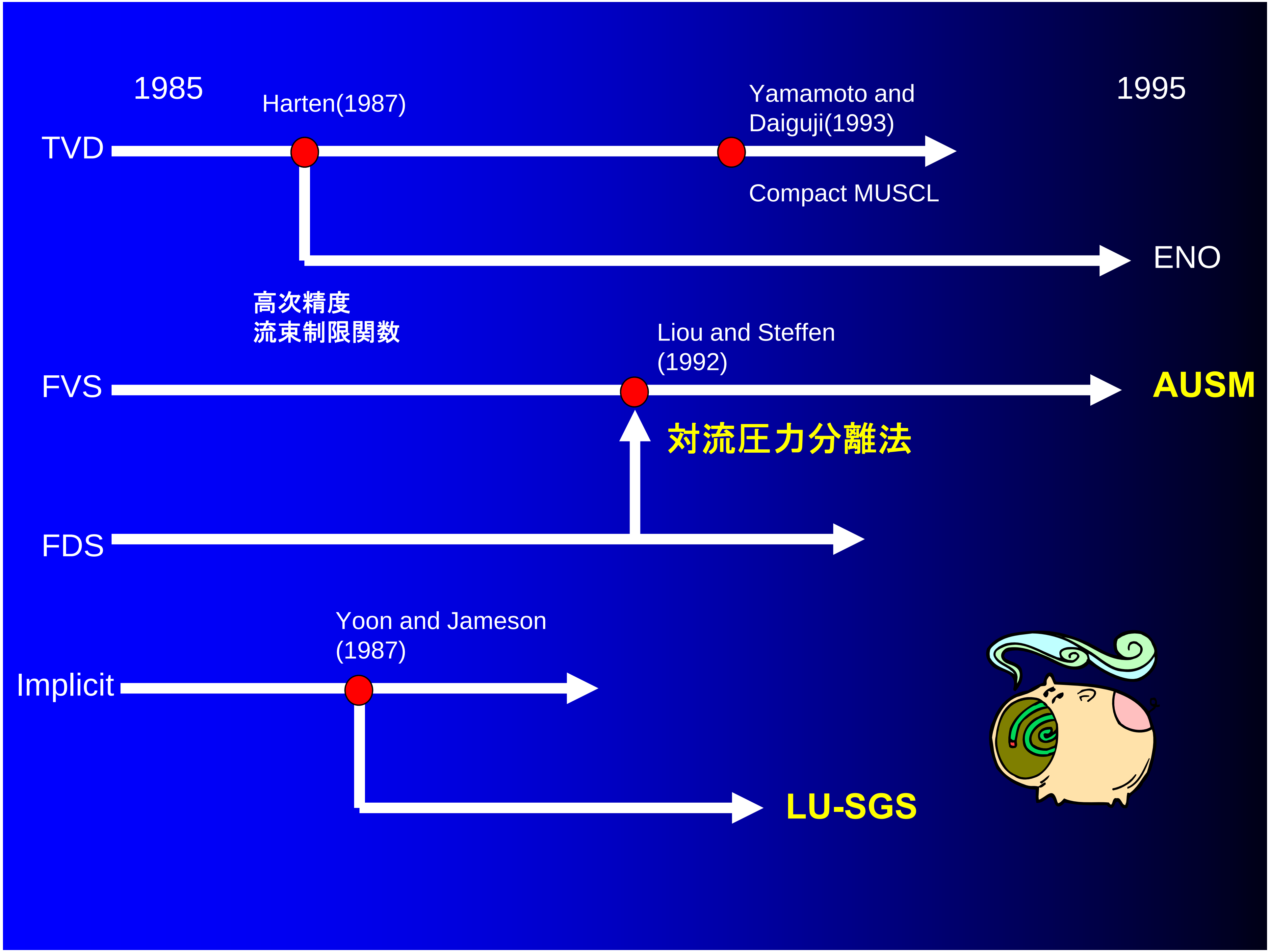
Lax and Friedrichs (1954)

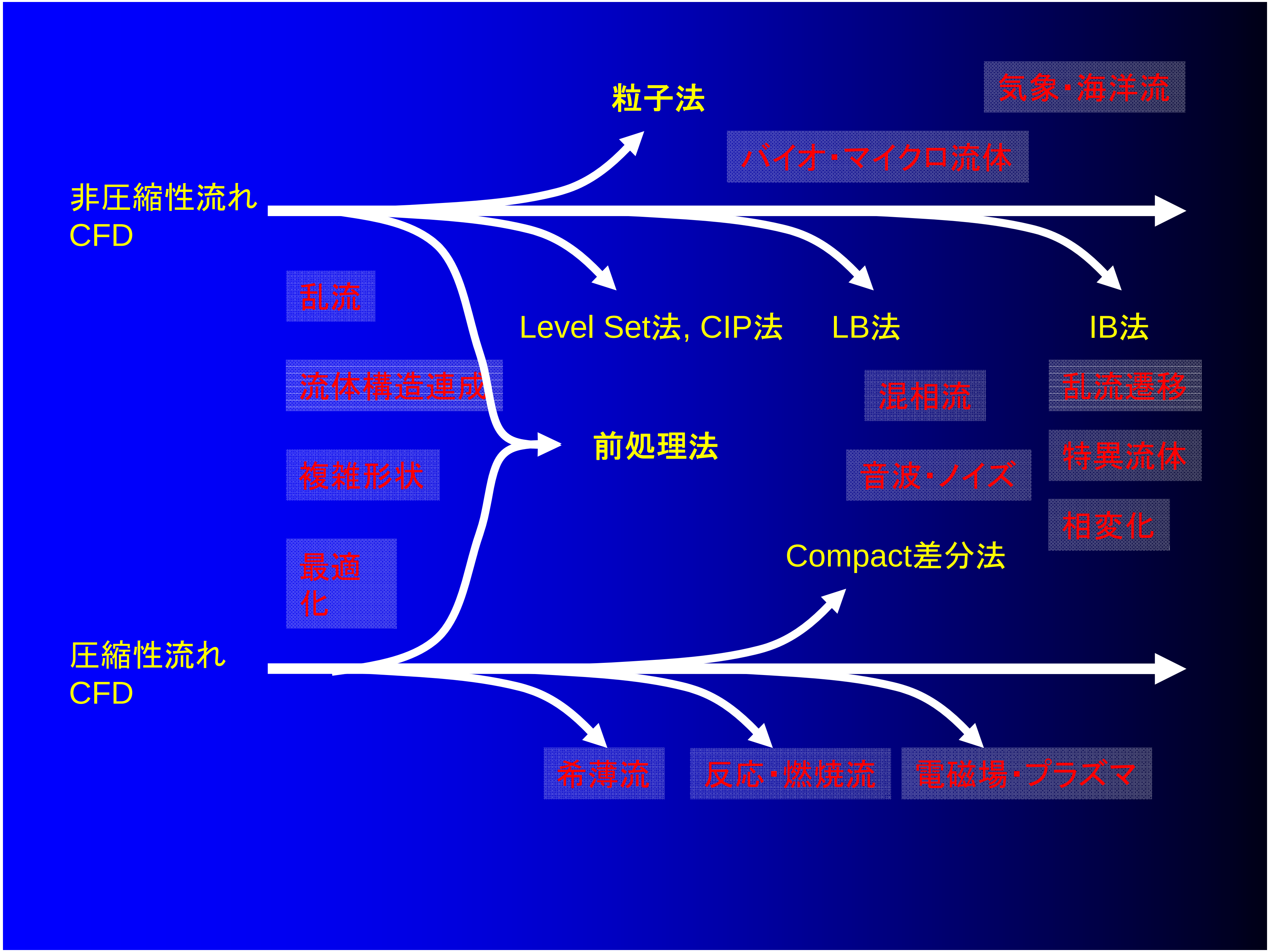


応用数学
特性の理論（Courant and Hilbert 1937)


1970
1975
1980
Johns and Launder
(1972)
非圧縮性
粘性流れ
Launder and Spalding
(1974)
非圧縮性
乱流
k-εモデル
RANS DNS LES
Cebeci-Smith
(1974)
Baldwin and Lomax
(1978)
代数モデル
MacCormack
and Baldwin
(1974)
McDonald and Briley
(1975)
van Leer
(1979)
圧縮性
非粘性流れ
圧縮性
非粘性流れ
人工粘性法
MUSCL
Beam and Warming
(1978)
陰解法
近似因子化法
Δ形式近似因子化法


1980
1985
Woodward and Colella
(1984)
PPM
高次精度
リーマン解法
Enquist and Osher
(1980)
Osher(1981)
近似リーマン
解法
Harten
(1983)
Yee, Davis, Roe,
Sweby, Chakravarthy etc.
TVD
流束制限関数(Flux Limiter)
Steger and Warming
(1981)
van Leer
(1982)
圧縮性
非粘性流れ
FVS
流束分離法(Flux Vector Splitting)
Roe(1981)
FDS
流束差分離法(Flux Difference Splitting)
Pulliam and Chaussee
(1981)
陰解法
Implicit
対角化近似因子化法


1985
Harten(1987)
Yamamoto and
Daiguji(1993)
1995
TVD
Compact MUSCL
ENO
高次精度
流束制限関数
Liou and Steffen
(1992)
FVS
AUSM
対流圧力分離法
FDS
Yoon and Jameson
(1987)
Implicit
LU-SGS



気象・海洋流
粒子法
バイオ・マイクロ流体
非圧縮性流れ
CFD
乱流
Level Set法, CIP法
LB法
IB法
流体構造連成
混相流
乱流遷移
前処理法
複雑形状
音波・ノイズ
特異流体
相変化
最適化
Compact差分法
圧縮性流れ
CFD
希薄流
反応・燃焼流
電磁場・プラズマ

偏微分方程式の型の分類（Type of Partial Differential Equation(PDE)

特性方程式の根（特性曲線の傾斜）で型を分類

2つの複素根

楕円型（Elliptic)
Laplace (Poisson) 方程式

楕円型方程式の差分解法
Gauss-Seidel法、SOR法

重根

放物型（Parabolic)
熱伝導方程式

放物型方程式の差分解法
SOR法＋Crank-Nicolson法

2つの実数根

双曲型（Hyperbolic)
波動方程式

双曲型方程式の差分解法
特性曲線法

圧縮性流れの数値解法

二階線形偏微分方程式(Second-order linear PDE)

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f$$

特性の理論(Characteristic theory)に基づき式を変形

$$s\left\{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C\right\} - \left\{A\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + C\frac{dq}{dx} + f\frac{dy}{dx}\right\} = 0$$

ただし

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

これが成り立つためには

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0 \quad \text{and} \quad A\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + C\frac{dq}{dx} + f\frac{dy}{dx} = 0$$

特性方程式(Characteristic equation)

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

特性方程式の根

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \Rightarrow \lambda$$

根の符号による型の分類

$B^2 - AC > 0$　２つの異なる実根　→　双曲型（Hyperbolic)

$B^2 - AC = 0$　重根　→　放物型（Parabolic)

$B^2 - AC < 0$　２つの異なる複素根　→　楕円型（Elliptic)

もう1つの方程式

$$A\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+C\frac{dq}{dx}+f\frac{dy}{dx}=0$$

常微分方程式に帰着

$$A\frac{dp}{dx}\lambda+C\frac{dq}{dx}+f\lambda=0$$

$$\lambda^{+}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{+}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\quad\Rightarrow\quad A\frac{dp}{dx}\lambda^{+}+C\frac{dq}{dx}+f\lambda^{+}=0$$

$$\lambda^{-}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}\quad\Rightarrow\quad A\frac{dp}{dx}\lambda^{-}+C\frac{dq}{dx}+f\lambda^{-}=0$$

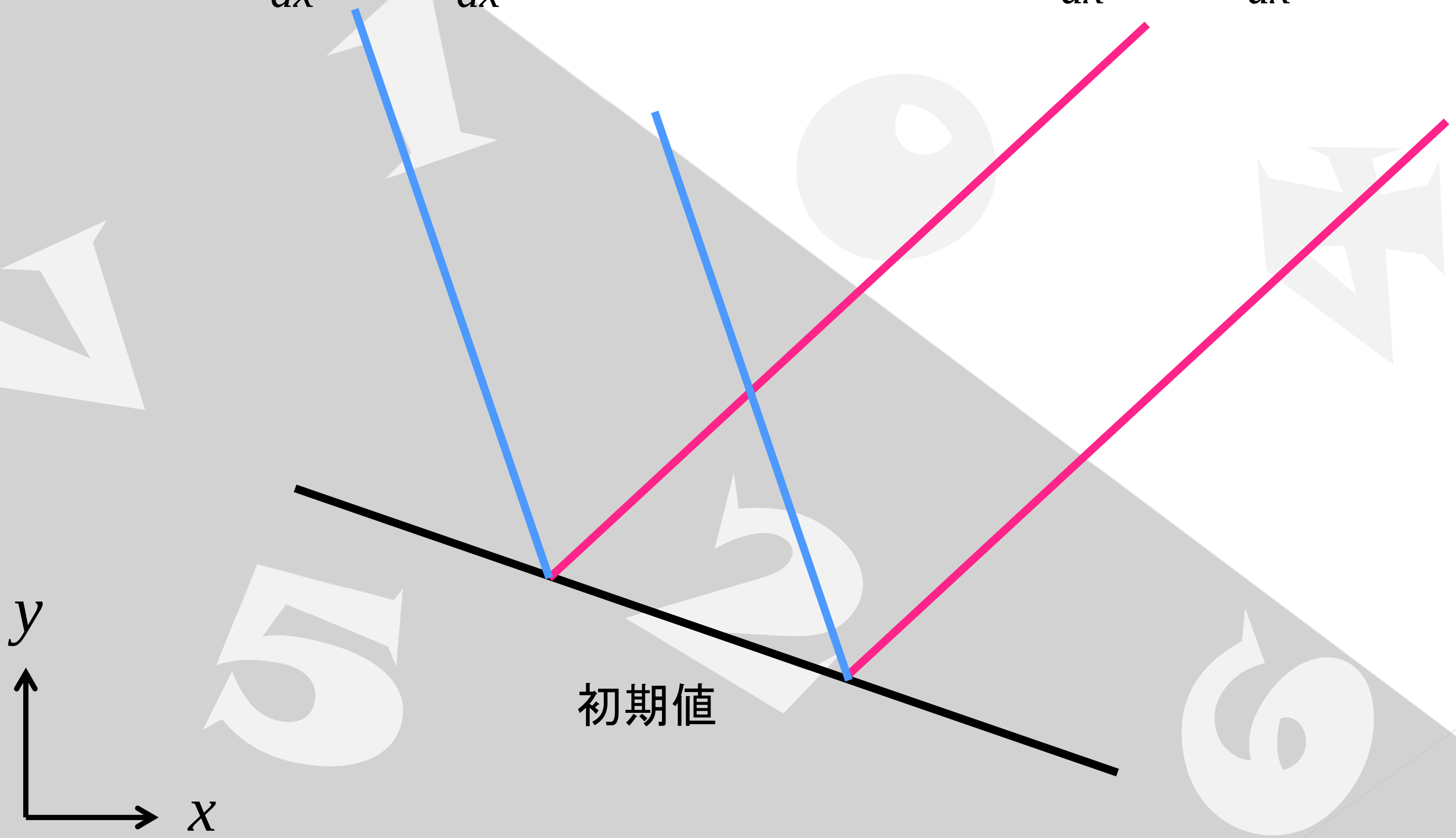
特性曲線とその勾配ならびに常微分方程式との関係

$$\lambda^- = \left(\frac{dy}{dx}\right)^- = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$A\frac{dp}{dx}\lambda^- + C\frac{dq}{dx} + f\lambda^- = 0$$

$$\lambda^+ = \left(\frac{dy}{dx}\right)^+ = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

$$A\frac{dp}{dx}\lambda^+ + C\frac{dq}{dx} + f\lambda^+ = 0$$



1次元圧縮性オイラー方程式（1-D Compressible Euler Equations）

$$Q_t + F_x = 0 \qquad Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e+p)u \end{bmatrix}$$

状態方程式（Equation of state)

$$p = \rho RT$$

線形化（Linearization)

$$Q_t + AQ_x = 0$$

ヤコビ行列(Jacobian Matrix)

$$A = \partial F / \partial Q \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)u^2/2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u e/\rho & \gamma e/\rho - 3(\gamma-1)u^2/2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列導出上の留意点

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \rho} \neq u$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} m \\ (\gamma - 1)e + (3-\gamma)m^2/(2\rho) \\ \left(\gamma e - (\gamma - 1)m^2/(2\rho)\right)m/\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \rho} = \frac{\partial f_1}{\partial \rho} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial e} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial e} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial m} & \frac{\partial f_3}{\partial e} \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列の特質

$$F_x = AQ_x$$

オイラーの同次関係（Euler’s homogeneity relation)

$$F = AQ \qquad F_x = AQ_x = (AQ)_x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma)u^2/2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3-\gamma ue/\rho & \gamma e/\rho-3(\gamma-1)u^2/2 & \gamma u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+p \\ (e+p)u \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列は微分に影響されない！

非保存形への変換(Transform to nonconservative form)

$$\tilde{Q}_t + \tilde{A}\tilde{Q}_x = 0$$

非保存形の未知変数(初期変数, Primitive variables)と非保存形のヤコビ行列

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}$$

非保存形への変換行列

$$\tilde{Q}_t + \tilde{A}\tilde{Q}_x = N\left(Q_t + AQ_x\right)$$

$$N = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ \tilde{\gamma}u^2/2 & -\tilde{\gamma}u & \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \qquad N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/\tilde{\gamma} \end{bmatrix} \qquad \tilde{\gamma} = \gamma - 1$$

保存形と非保存形ヤコビ行列の関係

$$\tilde{A} = NAN^{-1}$$

特性条件（固有値）の導出(Derivation of eigenvalues)

$$\left|\tilde{A}-\lambda I\right|=0$$

$$\begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u-\lambda \end{vmatrix}=0$$

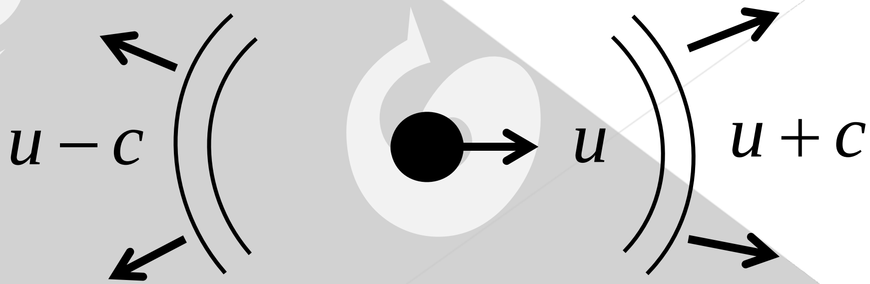
$$(u-\lambda)(u-c-\lambda)(u+c-\lambda)=0$$

ヤコビ行列の固有値（特性速度、Characteristic speeds）

$$\lambda=u,\ u\pm c$$

$\lambda=u$ 流跡線

$\lambda=u\pm c$ 2つの圧縮波



非保存形の左固有ベクトルの導出(Derivation of nonconservative left eigenvalues)

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u + c, \quad \lambda_3 = u - c$$

$$\ell^{(k)}\left(\tilde{A} - \lambda_k I\right) = 0$$

$$\ell^{(k)}\tilde{A} = \lambda_k \ell^{(k)}$$

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(k)} & \ell_2^{(k)} & \ell_3^{(k)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} \ell_1^{(k)} & \ell_2^{(k)} & \ell_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

固有値、固有ベクトル、ヤコビ行列の関係

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \ell_1^{(1)} & \ell_2^{(1)} & \ell_3^{(1)} \\ \ell_1^{(2)} & \ell_2^{(2)} & \ell_3^{(2)} \\ \ell_1^{(3)} & \ell_2^{(3)} & \ell_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{bmatrix} \qquad \tilde{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & & \\ & u+c & \\ & & u-c \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}\tilde{A} = \Lambda\tilde{L} \qquad \tilde{A} = \tilde{L}^{-1}\Lambda\tilde{L} = NAN^{-1}$$

$$\underline{A = N^{-1}\tilde{L}^{-1}\Lambda\tilde{L}N}$$

特性変数の導出(Derivation of characteristic variables)

$$\tilde{L}\left(\tilde{Q}_t + \tilde{A}\tilde{Q}_x\right) = 0$$

$$\delta W = \tilde{L}\,\delta\tilde{Q}$$

$$\delta W = \tilde{L}\,\delta\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\rho - \delta p/c^2 \\ \delta u + \delta p/\rho c \\ \delta u - \delta p/\rho c \end{bmatrix}$$

特性変数からなる方程式系の導出

$$W_t + \Lambda W_x = 0$$

エントロピーとリーマン変数を未知変数とする独立した方程式系
(Equations of Entropy and Riemann variables)

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right) + (u + c)\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{2c}{\gamma - 1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right) + (u - c)\frac{\partial}{\partial x}\left(u - \frac{2c}{\gamma - 1}\right) = 0$$

熱力学の関係式
を駆使

$$u \pm \frac{2c}{\gamma - 1}$$

リーマン変数 → リーマン不変量
(Riemann invariant)

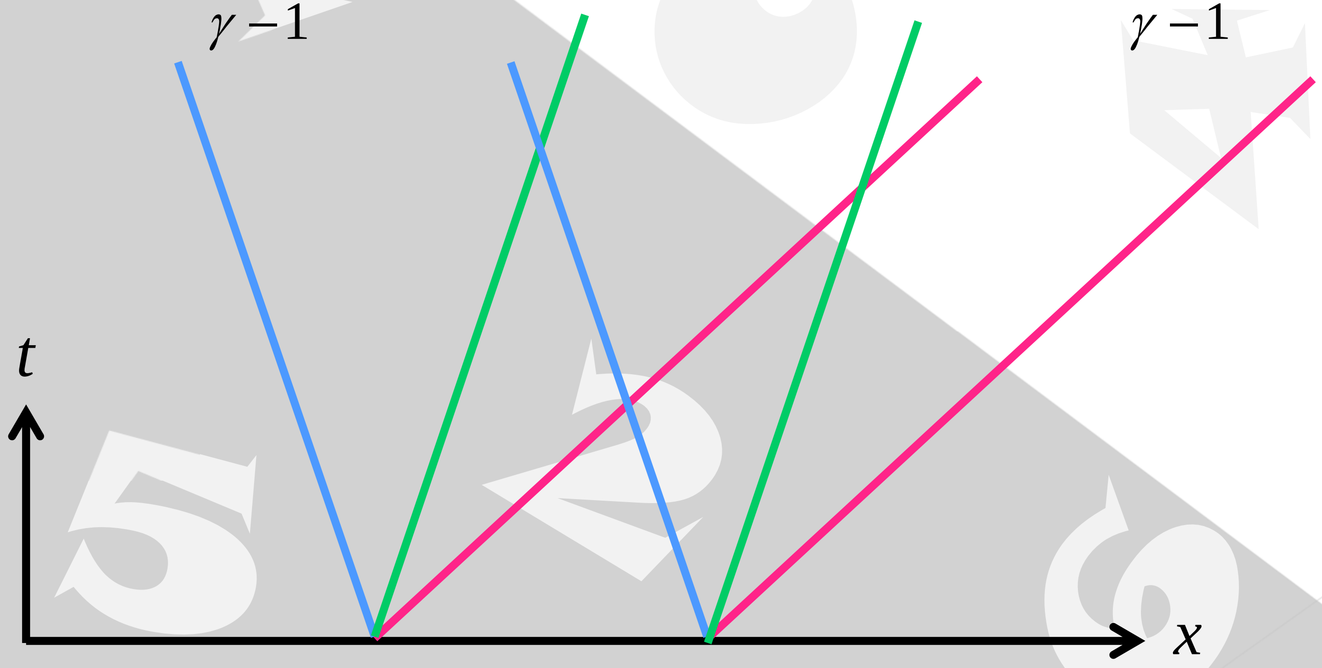
$$w_t + \lambda w_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dt} = 0$$

特性速度を勾配に持つ特性曲線上で成り立つ独立した3つの常微分方程式！

特性曲線とその勾配ならびに特性変数との関係

$$\lambda_3 = \frac{dx}{dt} = u - c \qquad \lambda_1 = \frac{dx}{dt} = u \qquad \lambda_2 = \frac{dx}{dt} = u + c$$

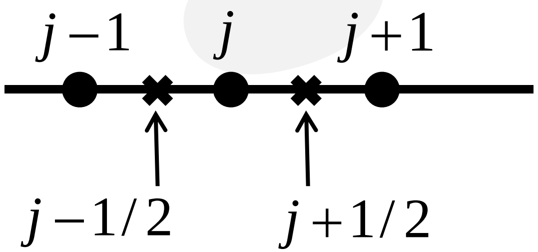
$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = const. \qquad s = const. \qquad u + \frac{2c}{\gamma - 1} = const.$$



初期値

特性の理論に基づく流束分離式の導出
(Derivation of Flux-vector Splitting Form based on Characteristic Theory)

$$Q_t = -\left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2}\right)/\Delta x$$



$$F = F^{+} + F^{-}$$

$$F^{\pm} = A^{\pm}Q = N^{-1}\tilde{L}^{-1}\Lambda^{\pm}\tilde{L}NQ$$

$$\Lambda^{\pm} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\pm} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_k^{\pm} = \left(\lambda_k \pm \left|\lambda_k\right|\right)/2$$

流束分離式(Flux-vector Splitting Form)

Steger and Warming(1981)

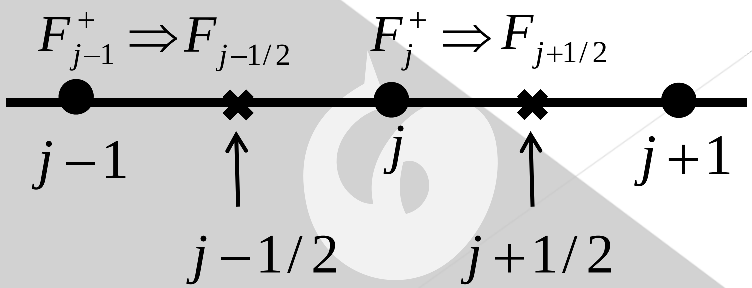
$$F^{\pm} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\rho \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{bmatrix} \lambda_1^{\pm} + \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ H + cu \end{bmatrix}\lambda_2^{\pm} + \frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ H - cu \end{bmatrix}\lambda_3^{\pm}$$

$$H = (e + p)/\rho$$

たとえば超音速流れ（$u > 0,\ u + c > 0,\ u - c > 0$）の場合

$$F_{j-1/2} = F_{j-1}^{+} \qquad (\because\ F_{j-1}^{-} = 0)$$

$$F_{j+1/2} = F_{j}^{+} \qquad (\because\ F_{j}^{-} = 0)$$



流束差分離式(Flux-difference Splitting Form)

$$Q_t = -\frac{\Delta F}{\Delta x} = -\frac{\left(A^{+}\Delta Q\right)_{j-1/2} + \left(A^{-}\Delta Q\right)_{j+1/2}}{\Delta x}$$

$$\Delta Q_{j+1/2} = Q_{j+1} - Q_j$$

$$A^{\pm}\Delta Q = N^{-1}\tilde{L}^{-1}\Lambda^{\pm}\tilde{L}N\Delta Q = N^{-1}\tilde{L}^{-1}\Lambda^{\pm}\tilde{L}\Delta\tilde{Q} = N^{-1}\tilde{L}^{-1}\Lambda^{\pm}\Delta W$$

$$= L^{-1}\Lambda^{\pm}\Delta W = R\Lambda^{\pm}\Delta W$$

$$\Delta W = \tilde{L}\Delta\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \Delta\rho - \Delta p / c^2 \\ \Delta u + \Delta p / \rho c \\ \Delta u - \Delta p / \rho c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \Delta w_3 \end{bmatrix}$$

流束差分離式(つづき)

$$R = L^{-1} = N^{-1}\tilde{L}^{-1} = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & r_3^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & r_3^{(2)} \\ r_1^{(3)} & r_2^{(3)} & r_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$R\Lambda^{\pm}\Delta W = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & r_3^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & r_3^{(2)} \\ r_1^{(3)} & r_2^{(3)} & r_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm}\Delta w_1 \\ \lambda_2^{\pm}\Delta w_2 \\ \lambda_3^{\pm}\Delta w_3 \end{bmatrix}$$

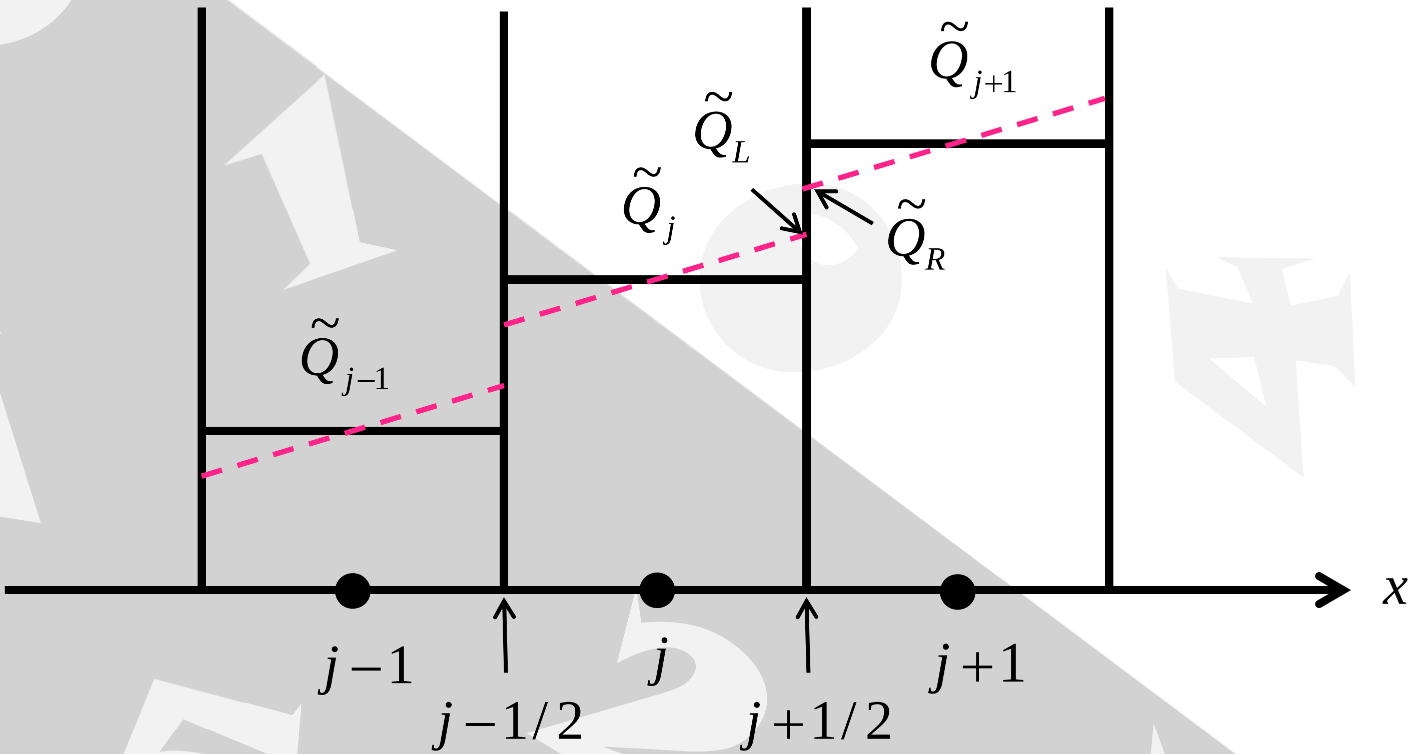
$$= \sum_k \lambda_k^{\pm}\Delta w_k r_k$$

$$A^{\pm}\Delta Q = \sum_k \lambda_k^{\pm}\Delta w_k r_k$$

$$Q_t = -\frac{\Delta F}{\Delta x} = -\frac{\left(\sum_k \lambda_k^{+}\Delta w_k r_k\right)_{j-1/2} + \left(\sum_k \lambda_k^{-}\Delta w_k r_k\right)_{j+1/2}}{\Delta x}$$

リーマン問題(Riemann Problem)

区分的領域の境界で1次元衝撃波管問題を解く



Roe 近似リーマン解法(Roe's Approximate Riemann Solver)
Roe(1981)

$$F_{j+/2} = \left\{F\left(\tilde{Q}_L\right) + F\left(\tilde{Q}_R\right)\right\}/2 + \left|A\left(\tilde{Q}_L, \tilde{Q}_R\right)\right|\left(\tilde{Q}_R - \tilde{Q}_L\right)/2$$

$$= \left\{F\left(\tilde{Q}_L\right) + F\left(\tilde{Q}_R\right)\right\}/2 + \underline{\sum_k \left|\bar{\lambda}_k^{\pm}\right| \Delta\bar{w}_k \bar{r}_k / 2}$$

Roe平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1}/\rho_j} \qquad \bar{u} = \frac{\left(\sqrt{u/\rho}\right)_{j+1} + \left(\sqrt{u/\rho}\right)_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \qquad \bar{H} = \frac{\left(\sqrt{H/\rho}\right)_{j+1} + \left(\sqrt{H/\rho}\right)_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}}$$

$$\bar{c}^2 = \tilde{\gamma}\left(\bar{H} - \bar{u}^2/2\right)$$

MUSCL補間(Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws)

van Leer(1979)

$$\tilde{Q}_L = \tilde{Q}_j + \frac{1-k}{4}\Delta\tilde{Q}_{j-1/2} + \frac{1+k}{4}\Delta\tilde{Q}_{j+1/2}$$

$$\tilde{Q}_R = \tilde{Q}_{j+1} - \frac{1+k}{4}\Delta\tilde{Q}_{j+1/2} - \frac{1-k}{4}\Delta\tilde{Q}_{j+3/2}$$

$k = -1$: 2nd-order fully upwind $\quad$ $k = 1/3$: 3rd-order biased upwind

Compact MUSCL Yamamoto and Daiguji (1993)

$$\tilde{Q}_L = \tilde{Q}_j + \frac{1}{6}\left(\Delta\tilde{Q}^*_{j-1/2} + 2\Delta\tilde{Q}^*_{j+1/2}\right)$$

$$\tilde{Q}_R = \tilde{Q}_{j+1} - \frac{1}{6}\left(2\Delta\tilde{Q}^*_{j+1/2} + \Delta\tilde{Q}^*_{j+3/2}\right)$$

$$\underline{\Delta\tilde{Q}^*_{j+1/2} = \Delta\tilde{Q}_{j+1/2} - \frac{1}{6}\Delta^3\tilde{Q}_{j+1/2}}$$

$$\Delta^3\tilde{Q}_{j+1/2} = \Delta\tilde{Q}_{j-1/2} - 2\Delta\tilde{Q}_{j+1/2} + \Delta\tilde{Q}_{j+3/2}$$

重要な補足事項

・2独立変数の特性の理論は1次元圧縮性オイラー方程式にのみ厳密

・多次元圧縮性オイラー方程式に厳密な特性の理論を適用した例は皆無

・圧縮性ナビエ・ストークス方程式は双曲型方程式ではない

・特性の理論は等エントロピー流れを仮定

・エントロピー変化を考慮しないと膨張扇（Expansion fan）が膨張波(Expansion shock)になる

・Steger-Warmingの流束分離式は超音速領域で特性の理論に忠実

・リーマン解法は圧縮性流れに含まれる波動である流跡線と圧縮波を分解するための方法

・2次精度以上のMUSCL補間では不連続面(衝撃波、接触不連続面)で数値振動する

・1次精度上流差分は単調関数

・ ・・・

詳しくは
大宮司久明著　数値流体力学大全　第16章　圧縮性流れの解法 – 1次元Euler方程式
http://www.caero.mech.tohoku.ac.jp/publicData/Daiguji/
もしくはGoogleで「数値流体力学大全」を検索

時間切れ　つづく