

第16章 圧縮性流れの解法—1次元Euler方程式

圧縮性流れは、物理では時空間における波動現象として、また数学では特性の理論 (theory of characteristics) の中で論じられてきた。その最も基本的な非定常1次元流れの偏微分方程式系は、特性の理論によって3つの常微分方程式の系に置き換えられるが、これらの常微分方程式は物理的には2つの圧力波 (acoustic waves) と1つのエントロピー波を表している。1つの圧力波とエントロピー波は流れの方向に伝播するが、残りの圧力波は超音速では流れ方向に亜音速では流れに逆らって伝播する。上流化 (upstreaming, 風上化 upwinding) は、各波に対しそれぞれを上流化すべきで、このような考えを流束分離という。流束そのものをその伝播方向によって分けるものを流束ベクトル分離法 (flux vector splitting), 流束の差分を分けるものを流束差分分離法 (flux difference splitting) という。流束分離は解の安定化や衝撃波などの不連続の鮮明な捕獲に欠かせないもので、圧縮性流れの多次元問題や Navier-Stokes 方程式においてもそうである。流束分離法で常微分方程式に置き換える操作は対角化 (diagonalization) といわれるが、偏微分方程式系の対角化は線形方程式に対して行われる。また保存形方程式が広く用いられているが、保存形の式は特性の理論を適用すると複雑になるために、対角化の前に非保存形 (nonconservative form) に変換することも多い。結局流束分離法では、線形化、非保存形化、対角化の一連の操作の後に上流化が行われることになる。流束分離においては圧縮性流れの数値解法のプログラムがブラックボックスにならないよう、ここでは冗長をおそれずこれらの操作を丁寧に解説する。

16.1 2独立変数の双曲型微分方程式

非定常1次元流れの微分方程式は2独立変数の双曲型偏微分方程式 (hyperbolic partial differential equations) で、初期値問題として解かれるものである。ここでは次の2独立変数の1階準線形双曲型方程式を考える¹。

$$u_t + Au_x + c = 0 \tag{16.1a}$$

ただし $u_t = \partial u / \partial t$, $u_x = \partial u / \partial x$, $u(x, t)$ は未知変数ベクトル, A は係数行列で、

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \tag{16.1b}$$

A と c は一般に x, t, u の関数である²。

¹準線形 (quasilinear) とはその方程式に含まれる最高階数に関して線形であることである。たとえば1階の方程式 $au_x + bu_y = c$ は a, b, c が x, y の関数のときに線形, x, y, u の関数のときに準線形である。2階の方程式 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ は a, b, c, d が x, y, u, u_x, u_y の関数のときに準線形である。式 (16.1) は最高階数 u_t, u_x の1次式で準線形である。

²与えられた微分方程式が高階微分を含む場合には、新たな従属変数を導入することによって1階微分方程式系にできるので、この方程式系は一般性のあるものである。例えば2階の方程式 $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$ は $u_x = p, u_y = q$ と置けば、1階の方程式の系は $ap_x + b(p_y + q_x) + cq_y = d, p_y - q_x = 0$ となる。また $Bu_t + Au_x + c = 0$ は、 $|B| \neq 0$ とすればその逆行列 B^{-1} を左から演算することによって式 (16.1) の形にすることができる。

いま $\phi\psi$ 曲線座標系を導入し独立変数を xt から $\phi\psi$ に変えれば, 式 (16.1) は次のように書き換えられる.

$$\left(\phi_t \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi_t \frac{\partial}{\partial \psi}\right)u + A\left(\phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} + \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi}\right)u + c = 0$$

この式を ϕ_x で割算すれば,

$$(A - \lambda I)u_\phi + g = 0 \quad (16.2)$$

ただし $\lambda = -\phi_t/\phi_x$, I は単位行列, また $g = \{c + (\psi_t I + \psi_x A)u_\psi\}/\phi_x$ は一般に ϕ, ψ, u, u_ψ の関数であるが u_ϕ の関数ではない. λ の代数方程式

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (16.3)$$

を特性条件 (characteristic condition) と言う. 曲線の式 $\phi(x, t) = \text{const.}$ は微分形で表せば $\phi_x dx + \phi_t dt = 0$ となるから, $\lambda = -\phi_t/\phi_x = dx/dt$ である. 式 (16.3) の根 λ_i に対する曲線

$$dx/dt = \lambda_i \quad (16.4)$$

を特性曲線 (characteristic curve) と言う.

式 (16.3) は λ の k 次代数方程式であるから, 一般に k 個の根 λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) を持つ. これらの根を行列 A の固有値 (eigenvalues) という. 行列 $A - \lambda I$ は k 個の行ベクトルまたは列ベクトルから構成されると解釈することができ, これらのベクトルは一般に k 次元空間を張る. しかしながら固有値 λ_i に対しては, 式 (16.3) は行列 $A - \lambda_i I$ を構成する k 個のベクトルが 1 次独立でないことを意味しており, これらのベクトルは $k-1$ 次元の面内に入る³. したがって k 次元空間内にこの面に直交する 1 つのベクトル l_i を取ることができる. 行ベクトル l_i は行列 $A - \lambda_i I$ を構成するすべてのベクトルに直交するから次式が成立する.

$$l_i(A - \lambda_i I) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (16.5)$$

ベクトル l_i は定まった方向を持つが大きさは任意で, 行列 A の左固有ベクトル (left eigenvectors) と呼ばれる. なお λ_i が n 重根の場合には, $A - \lambda_i I$ は $k-n$ 次元の多様体になり, この多様体に直交し互いに独立の n 個の左固有ベクトルを取ることができる. 式 (16.3) の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ のすべてが実数 (重根を含んでも良い) で, 式 (16.5) で定義される固有ベクトル l_1, l_2, \dots, l_k が 1 次独立ならば, 式 (16.1) は (全) 双曲型 (totally hyperbolic) である. また固有値のすべてが共役複素数ならば, 式 (16.1) は楕円型 (elliptic) である.

双曲型微分方程式 (16.1) は初期値問題 (initial value problem, Cauchy problem) として解かれる. 初期曲線 $\phi = 0$ が特性でない場合には, この初期曲線上に任意の初期値 u を与えることができる. またこのとき初期曲線上で式 (16.2) の A, λ, g の値が決まるので, この式から法線微分値 u_ϕ が求まり, 解 u すなわち積分曲面 (integral surface) を初期曲線のごく近傍に一意的に延長することができる (図 16.1(a))⁴.

次に, 初期曲線 $\phi = 0$ が特性の場合には, 初期値 u を任意に与えることはできない. それは例えば $k = 2$ の場合に, 式 (16.2) は

$$\bar{a}_{11}u_{1\phi} + \bar{a}_{12}u_{2\phi} + g_1 = 0$$

$$\bar{a}_{21}u_{1\phi} + \bar{a}_{22}u_{2\phi} + g_2 = 0$$

³ 一般に n 次元空間で面は $n-1$ 次元, 線は 1 次元で, 2 次元から $n-2$ 次元までの部分空間を多様体 (manifold) という.

⁴ 初期曲線のごく近傍に解を延長できれば, 初期曲線を延長部分に移し同様に解を延長し, 初期値問題を解くことができる.

のように書くことができ、式 (16.3) から $\bar{a}_{11}/\bar{a}_{21} = \bar{a}_{12}/\bar{a}_{22} \equiv \alpha$ となるので、 $g_1/g_2 = \alpha$ になるように初期値 u を与えないと、初期曲線上で微分方程式が成立しなくなる。またこの場合には2つの式が同値になり、方程式の数が足りないので (underdetermined system), u_ϕ は一意的に定まらなくなる。つまり初期曲線 $\phi = 0$ が特性の場合には、初期値 u は 初期曲線上で微分方程式 (16.2) が破綻しないように与える必要があり、またこの初期値から無数の解曲面を延長することができる (図 16.1(b))。

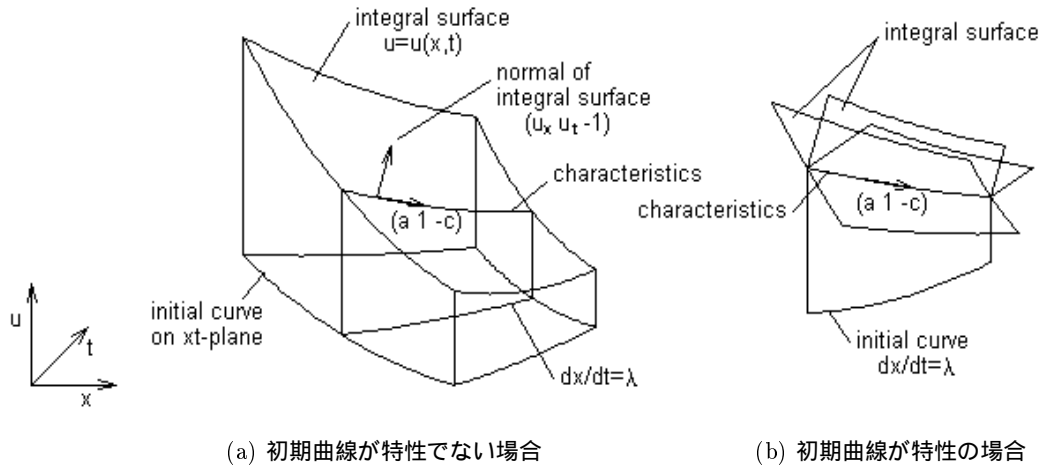


図 16.1: 双曲型微分方程式 $u_t + au_x + c = 0$ の初期値問題の解

式 (16.5) はまとめて次のように書くことができる。

$$LA - AL = 0 \tag{16.6}$$

ただし A は固有値 λ_i の対角行列、また L は左固有ベクトル l_i の行列で

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1k} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{kk} \end{pmatrix}$$

L の逆行列を $L^{-1} = R$ と書けば、 $LR = RL = I$, $l_i r_j = \delta_{ij}$ 。式 (16.6) から

$$A = RAL \tag{16.7}$$

R は右固有ベクトル (right eigenvectors) r_i の行列で

$$(A - \lambda_i I)r_i = 0 \tag{16.8}$$

なお固有値の集合は与えられた A に対して一意的に決まるが、固有ベクトルは任意性を持つから、式 (16.5) と式 (16.8) から独立に求めた l_i, r_i に対しては一般に $RL = I$ にはならない。

双曲型微分方程式系 (16.1) の左から固有ベクトル l_i を演算すれば、すなわち式 (16.1) を構成するすべての式の1次結合をベクトル l_i の成分を乗じて取れば、次の方程式が得られる。

$$l_i(u_t + \lambda_i u_x) + l_i c = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{16.9}$$

ここに微分演算子 $\partial/\partial t + \lambda_i \partial/\partial x \equiv D_i$ は式 (16.4) の特性曲線の内微分 (interior derivative) で⁵, この式は 1 つの微分演算子 D_i だけを含むので常微分方程式である. 結局, k 個の式からなる双曲型偏微分方程式系 (16.1) は k 個の式からなる常微分方程式系 (16.9) に置き換えることができる.

双曲型微分方程式 (16.1) が線形または半線形⁶であるとする. 式 (16.9) は行列を用いまとめて書けば

$$Lu_t + \Lambda Lu_x + Lc = 0 \quad (16.10a)$$

となる⁷. ここで未知変数ベクトル u の成分の 1 次結合を取った新しい未知変数ベクトル $U = Lu$ を導入する. $u = RU$, $u_t = RU_t + R_t U$ であるから上式は次のようになる.

$$U_t + AU_x + g = 0 \quad (16.10b)$$

ただし $g = L\{c + (R_t + \Lambda R_x)U\}$ は U の 1 次式である. したがって式 (16.10b) の i 番目の式は

$$D_i U_i = -g_i \equiv -(g_{i0} + g_{i1}U_1 + g_{i2}U_2 + \cdots + g_{ik}U_k) \quad (16.10c)$$

のように書くことができる. これより双曲型微分方程式によって支配される場の性質を次のように説明することができる. 式 (16.10c) は i 番目の特性曲線 $dx/dt = \lambda_i$ に沿って伝播する波の式で, その位相速度は λ_i である. もし g_i がゼロならば変数 U_i はこの特性曲線に沿って一定になり, g_i がゼロでないときにも, U_i はこの特性曲線に沿って連続に変化する. しかし U_i の初期値に不連続⁸のあるときには, 不連続の両側から始まる特性曲線に沿って U_i のそれぞれの値が伝播するので, i 番目の特性曲線に沿って初期値の不連続も伝播することになる. なおこの特性曲線を横切って U_i の値は不連続になるが, ほかの特性曲線に沿って伝播する U_j の値は不連続にはならない. 式 (16.1) が準線形の場合にも同様のことが言える.

16.2 1次元流れの特性の理論

この節では上述の特性の理論を 1次元流れの Euler 方程式の初期値問題に適用する. ここでは連続方程式, Euler の運動方程式, エネルギー方程式からなる微分方程式系を Euler 方程式 (the Euler equations) と呼ぶことにする. ある流体の系 (同一流体からなる) に質量, 運動量, エネルギーの保存則を適用すれば, 最初に導かれる微分方程式は次の保存形 Navier-Stokes 方程式 (the conservative Navier-Stokes equations) である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) &= \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{f} \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

ただし ρ は密度, \mathbf{u} は流速, p は静圧, $e = \rho(\epsilon + \mathbf{u}^2/2)$ は単位体積当たりの岐点内部エネルギー, $H = h + \mathbf{u}^2/2$ は岐点エンタルピー, $\mathbf{\Pi}$ は粘性応力テンソル, \mathbf{q} は熱流束, \mathbf{f} は外力, また $T, \epsilon, h = \epsilon + p/\rho$ はそれぞれ絶対温度, 比内部エネルギー, 比エンタルピーである. この方程式系の拡散に関わる項すなわち $\mathbf{\Pi}$ と \mathbf{q} を含む

⁵ $D_i = \partial/\partial t + \lambda_i \partial/\partial x = (1/\lambda_i) \cdot (\partial/\partial t \partial/\partial x)$. 特性曲線の式 (16.4) を用いれば $D_i \sim (dt/dx) \cdot (\partial/\partial t \partial/\partial x) = dx \cdot \nabla \cdot dx$ は特性曲線に沿うベクトルであるから, D_i は特性曲線方向の微分であることが分かる.

⁶ 線形は A, c が x, t の関数の場合, 半線形 (semilinear) は A が x, t の関数で c が x, t, u の関数の場合である.

⁷ 行列演算では交換律 $ab = ba$ が成立しないことに注意.

⁸ 不連続ないし不連続性 (discontinuities) とは, 変数またはその 1 階微分, 2 階微分, ... が不連続であることをいう.

項を無視した方程式系が保存形オイラー方程式 (the conservative Euler equations) である．非保存形 Euler 方程式 (the nonconservative Euler equations) は保存形方程式から導かれ，例えば次のように書かれる．

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\rho\nabla\cdot\mathbf{u} \\ \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathbf{f} \\ \frac{dp}{dt} &= -\rho c^2\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

ただし $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$ は実質微分 (substantial derivative) の演算子で流跡線に沿う内微分 (interior derivative) を表し， c は音速である．特性の理論はもともと簡潔な非保存形方程式に対して開発されたが，衝撃波の捕獲には保存形方程式が優れている．読者は，以下に述べる1次元 Euler 方程式への特性の理論の適用において，保存形と非保存形方程式が如何に補完し合うかを知ることであろう．

16.2.1 保存形方程式とヤコビ行列

非定常1次元流れの Euler 方程式 (Euler equations) は保存形で書けば次のようになる．

$$q_t + F_x = 0 \tag{16.11a}$$

ただし

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} \tag{16.11b}$$

である⁹． q は未知変数ベクトル， F は流束ベクトル (flux vector) である．式 (16.11) はまた次のように線形化 (linearization) することができる．

$$q_t + Aq_x = 0 \tag{16.12a}$$

ただし $A \equiv \partial F/\partial q$ はヤコビ行列 (Jacobian matrix) である．

ヤコビ行列 A を求めるには，まず流束 F を q の成分 ρ , $m \equiv \rho u$, e で表すことが必要である． F は q が既知のときに状態方程式 (equations of state) を用い求めることができる．熱力学に関してはここに詳しく述べないが，平衡状態にある気体の状態は，気体の種類が指定されるときに，基本的に粒子 (分子) の数密度とランダム速度の2つによって決まる．数密度は単位体積当たりの粒子数，ランダム速度は平均流に乗って見た粒子の速度分布である．したがって状態方程式は

$$\begin{aligned}p &= p(\epsilon, \rho), \\ T &= T(\epsilon, \rho)\end{aligned}$$

のように表すことができる．熱力学という状態量 (properties) ρ , p , T , ϵ , ... は2つを指定すれば残りは状態方程式から求められるが，これはすべての状態量が数密度とランダム速度の関数として与えられるこ

⁹ 保存形 (conservative form) とは，対流項が発散形 (divergence form) で表示されているものをいう．保存形方程式と次項の非保存形方程式は数式としてはもちろん等価であるが，数値計算では等価にならないことに注意すべきである．

とおもえば当然である．いま完全気体 (perfect gas) を仮定すれば上式の関数形は次のように定まる．

$$\begin{aligned} p &= \rho RT, \\ d\epsilon &= c_v dT \\ (dh &= c_p dT) \end{aligned}$$

また気体定数 R ，定圧比熱 c_p ，定積比熱 c_v ，比熱比 γ の間には次の関係があり，2つのみ与えることができ残りはこれらの式から決定される．

$$R = c_p - c_v, \quad \gamma = c_p / c_v$$

これらの熱力学の式から次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} p &= \tilde{\gamma} \rho \epsilon = \tilde{\gamma} \left(e - \rho \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \tilde{\gamma} e - \rho \phi^2, \\ H &= h + \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \frac{\gamma e}{\rho} - \phi^2 = \frac{e+p}{\rho} = \frac{c^2 + \phi^2}{\tilde{\gamma}} \end{aligned}$$

ただし $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ ， $\phi^2 = \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2 / 2$ ， $c^2 = \gamma p / \rho$ ， c は音速．これよりヤコビ行列 A は次のように求められる¹⁰．

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial \left(\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho H u \right)}{\partial \left(\rho \quad \rho u \quad e \right)} \\ &= \frac{\partial \left(m \quad \tilde{\gamma} e + (3-\gamma) \frac{m^2}{2\rho} \quad \frac{m}{\rho} \left\{ \gamma e - \tilde{\gamma} \frac{m^2}{2\rho} \right\} \right)}{\partial \left(\rho \quad m \quad e \right)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3-\gamma) \frac{u^2}{2} & (3-\gamma)u & \tilde{\gamma} \\ -Hu + \phi^2 u & H - \tilde{\gamma} u^2 & \gamma u \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{16.12b}$$

流束 F は q の成分 ρ ， m ， e の 1 次の同次関数である．したがって同次関数 (homogeneous functions) における Euler の同次関係 (Euler's homogeneity relation) を適用すれば次式が導かれる¹¹．

$$F = Aq \tag{16.13a}$$

この関係を用いれば

$$F_x = Aq_x = (Aq)_x, \quad A_x q = 0 \tag{16.13b}$$

になることが分かる．式 (16.13) のような関係は， F のすべての成分が q の成分の 1 次の同次式のときのみ成立する．また式 (16.13) が成立することは，ベクトル q に行列 A を掛けることによって確かめることができる．

¹⁰ A の第 1 列の要素は次のように計算される．

$$A_{11} = \partial(\rho u) / \partial \rho = \partial m / \partial \rho = 0$$

$$A_{21} = \partial(\rho u^2 + p) / \partial \rho = \partial(\tilde{\gamma} e + (3-\gamma)m^2 / 2\rho) / \partial \rho = -(3-\gamma)m^2 / 2\rho^2 = -(3-\gamma)u^2 / 2$$

$$A_{31} = \partial(\rho H u) / \partial \rho = \partial\left(\frac{m}{\rho} \left\{ \gamma e - \tilde{\gamma} \frac{m^2}{2\rho} \right\}\right) / \partial \rho = -\gamma e m / \rho^2 + \tilde{\gamma} m^3 / \rho^3 = -\gamma(\epsilon + u^2 / 2)u + \tilde{\gamma} u^3 = -Hu + \phi^2 u$$

¹¹ 関数 $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が x_1, x_2, \dots, x_n に関し α 次の同次関数ならば $u(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ である．この式を t で微分し $t = 1$ と置けば，次の Euler の同次関係が導かれる．

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + \dots + x_n u_{x_n} = \alpha u$$

u は F の 3 成分のどれか 1 つを取り， $x_1 = \rho$ ， $x_2 = m$ ， $x_3 = e$ ， $\alpha = 1$ と置いてこの式を適用する．

16.2.2 非保存形への変換

一般に保存形方程式のヤコビ行列は非保存形方程式のものに較べ複雑である．1次元流れの場合にはそれほどでもないが，多次元の一般曲線座標系の場合には違いは顕著である．この項では非保存形オイラー方程式，保存形オイラー方程式の非保存形への変換，ヤコビ行列 A と A^* の関係について述べる．かつては非保存形方程式が多く用いられ，特性の理論も非保存形方程式に対して論じられてきた．非保存形に関する変数を $*$ を付けて示すことにすれば，非保存形オイラー方程式は次のようになる．

$$q_t^* + A^* q_x^* = 0 \quad (16.14a)$$

ただし

$$q^* = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix} \quad (16.14b)$$

また $c^2 = \gamma p/\rho$ ， c は音速である．この場合の行列 A^* は保存形の A に比べかなり簡単になっている．

保存形方程式を非保存形に変換する行列を N とすれば，

$$N(q_t + Aq_x) = q_t^* + A^* q_x^* \quad (16.15a)$$

これより

$$dq^* = N dq, \quad A^* = N A N^{-1} \quad (16.15b)$$

となる． $N = \partial q^*/\partial q$ の要素は前項のようにして求められ， N とその逆行列 N^{-1} は次のようになる．

$$N = \frac{\partial q^*}{\partial q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}u & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (16.16)$$

ただし $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ ， $\phi^2 = \tilde{\gamma}u^2/2$ である¹²．

16.2.3 固有値，固有ベクトル，対角化

非保存形オイラー方程式の特性条件は，式 (16.3) より次のようになる．

$$|A^* - \lambda I| = \begin{vmatrix} u-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u-\lambda \end{vmatrix} = (u-\lambda)(u+c-\lambda)(u-c-\lambda) = 0$$

固有値はこの λ の代数方程式の根で次のように求められる．

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u+c, \quad \lambda_3 = u-c$$

これらの固有値の対角行列 A を次のように置く．

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix} \quad (16.17)$$

¹² q^* の成分は q の成分の 1 次の同次式ではないから前項と異なり $q^* = Nq$ にはならない．

また左固有ベクトルを求める式は，式 (16.5) より次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \ell_{i1}^* & \ell_{i2}^* & \ell_{i3}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-\lambda_i & \rho & 0 \\ 0 & u-\lambda_i & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u-\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

各固有値 λ_i に対する3つの式のうち独立のものは2つである．これらの式を満足する左固有ベクトルの行列 L^* とその逆行列 $L^{*-1} = R^*$ は次のようになる¹³．

$$L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{pmatrix} \quad (16.18)$$

前節の式 (16.6) と (16.7) は A^* に対しても成立し次式が得られる．

$$L^* A^* = A L^*, \quad A^* = R^* A L^* \quad (16.19)$$

このように行列 A^* は L^* を演算することによって対角行列 A にもっていくこと，対角化することができる．また式 (16.15) を用いれば次の関係が得られる．

$$A = N^{-1} R^* A L^* N = R A L, \quad R = N^{-1} R^*, \quad L = L^* N \quad (16.20)$$

式 (16.20) から行列 A と A^* の固有値は等しいことが分かるが，これは固有値が物理的に波の位相速度を表すもので，保存形オイラー方程式 (16.11) と非保存形オイラー方程式の (16.14) は同じ波の式であるから当然のことと言える．行列を式 (16.19)，(16.20) のように書き換えることを対角化 (diagonalization) という．

16.2.4 適合方程式

ここでは非保存形オイラー方程式 (16.14) に対し常微分方程式系を導く．1次元流れの場合には，特性(曲線)

$$dx/dt = \lambda_i = u, u \pm c \quad (16.21)$$

は流跡線 (path lines) と2つの圧力波 (acoustic waves) を表している (図 16.2)．特性曲線 $dx/dt = \lambda_i$ 上の常微分方程式は，式 (16.14) の左から行ベクトル ℓ_i^* を掛け，式 (16.18) すなわち $\ell_i^* (A^* - \lambda_i I) = 0$ を用い次のように導かれる．

$$\ell_i^* (q_t^* + \lambda_i q_x^*) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (16.22)$$

¹³ 固有値 $\lambda_1 = u$ に対しては第1式は意味のないものになり，第2式 $\rho \ell_{11}^* + \rho c^2 \ell_{13}^* = 0$ から $\ell_{11}^* = 1$, $\ell_{13}^* = -1/c^2$ ，第3式 $(1/\rho) \ell_{12}^* = 0$ から $\ell_{12}^* = 0$ となる．前節に述べたように固有ベクトルの大きさは任意であるが，通常簡単なものが選ばれ，ここでは在来のものに倣った．

固有値 $\lambda_2 = u+c$ に対しては，第1式から $\ell_{21}^* = 0$ ，第2式から $\ell_{22}^* = 1$, $\ell_{23}^* = 1/\rho c$ となる．固有値 $\lambda_3 = u-c$ に対しても同様である．

また逆行列 R^* は， L^* と単位行列 I の要素を $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ のように並べて書き， L^* のところを単位行列にするように，1つの行を α 倍する．1つの行を α 倍したものを他の行に加える．操作を繰り返せば， L^* のところが単位行列になった時点で I のところが逆行列 R^* になる．

この常微分方程式は固有値 λ_i に対する適合方程式 (compatibility relations, — equations) と呼ばれている。あるいは3つの波の式をまとめて書けば適合方程式は次のようになる。

$$\partial w \equiv L^* q_t^* + \Lambda L^* q_x^* = 0 \tag{16.23}$$

この式で定義される変数 w は特性変数 (characteristic variables) と呼ばれる。式 (16.23) は次のように書くこともできる。

$$\partial_1 w_1 = D_1 \rho - \frac{1}{c^2} D_1 p = 0 \quad (1 \text{ つの流跡線 } dx/dt = u \text{ に沿って}) \tag{16.24a}$$

$$\partial_2 w_2 = D_2 u + \frac{1}{\rho c} D_2 p = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u+c \text{ に沿って}) \tag{16.24b}$$

$$\partial_3 w_3 = D_3 u - \frac{1}{\rho c} D_3 p = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u-c \text{ に沿って}) \tag{16.24c}$$

ただし $D_i = \partial/\partial t + \lambda_i \partial/\partial x$, また ∂ は $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ の対角行列である。

式 (16.24a) は等エントロピー流れの条件 $c^2 = dp/d\rho$ である。すなわち熱力学の法則 $Tds = d\epsilon + p d(1/\rho) = dh - (1/\rho)dp$, 状態方程式の微分 $dp/p = d\rho/\rho + dT/T$, 音速の定義式 $c^2 = \gamma RT$ を用いれば, 式 (16.24a) は

$$ds = 0 \quad (1 \text{ つの流跡線 } dx/dt = u \text{ に沿って}) \tag{16.25a}$$

となり¹⁴ , 1つの流跡線に沿ってエントロピー s 一定の条件であることが分かる。式 (16.24b) と (16.24c) は1つの圧力波に沿って積分すれば

$$w_2 - w_{20} = u - u_0 + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho c} = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u+c \text{ に沿って}) \tag{16.25b}$$

$$w_3 - w_{30} = u - u_0 - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho c} = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u-c \text{ に沿って}) \tag{16.25c}$$

となる。これらの各圧力波に沿って一定になる特性変数 w_2, w_3 はリーマン変数 (Riemann variables) またはリーマン不変量 (Riemann invariants) と呼ばれる。

ここで一様エントロピー流れ (homentropic flow) を考えれば, 圧力波 $dx/dt = u \pm c$ に沿っても流れは等エントロピーになり, $p/\rho^\gamma = \text{const.}$ が成立する¹⁵。この関係を用いればリーマン不変量の式 (16.25b)(16.25c)

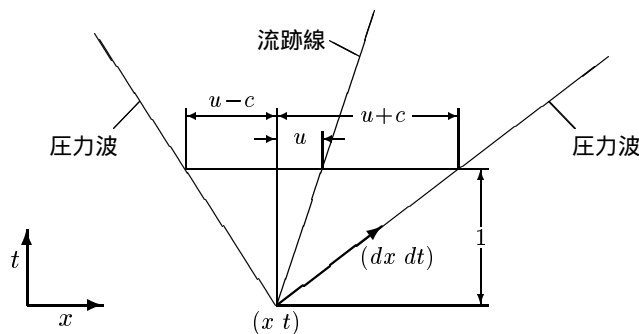


図 16.2: 流跡線と圧力波

¹⁴

$$ds = \frac{1}{T} dh - \frac{1}{\rho T} dp = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} = \frac{c_v}{p} (dp - c^2 d\rho)$$

¹⁵ 完全気体の状態方程式を用いれば, $T/\rho^{\gamma-1} = \text{const.}$, $T/p^{(\gamma-1)/\gamma} = \text{const.}$ のような関係も得られる。

は次のようになる¹⁶ .

$$w_2 = u + \frac{2}{\gamma-1}c = \text{const.} \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u+c \text{ に沿って})$$

$$w_3 = u - \frac{2}{\gamma-1}c = \text{const.} \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u-c \text{ に沿って})$$

以上をまとめれば、一様エントロピー流れの仮定のもとでは、オイラー方程式 (16.14) は特性の理論に基づき次のように書き換えることができる .

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (1 \text{ つの流跡線 } dx/dt = u \text{ に沿って}) \quad (16.26a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u+c \text{ に沿って}) \quad (16.26b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \left(u - \frac{2c}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (1 \text{ つの圧力波 } dx/dt = u-c \text{ に沿って}) \quad (16.26c)$$

管内の1次元流れでは、管端の条件は、特性の理論により適正に与えることができる . この境界条件は基本的には外部からその境界に入る特性の特性変数を与えれば良いことになる . 流速 $u > 0$ とすれば

入 口	超音速 亜音速	w_1, w_2, w_3 の値を与える w_1, w_2 の値を与え, w_3 の値を領域内部の既知の値から計算する
出 口	超音速 亜音速	w_1, w_2, w_3 の値を領域内部の既知の値から計算する w_3 の値を与え, w_1, w_2 の値を領域内部の既知の値から計算する

実用計算では、管端の条件は、外部からその境界に入る特性の数に合わせ、例えば亜音速の場合には、入口境界に流速と岐点密度、出口境界に静圧を与える . また超音速の場合には、入口境界に流速、岐点密度、岐点圧力を与え、出口境界には何も与えないようにする . 境界における流れの条件が過不足なく適正に与えられることによってはじめて適正な結果が得られることになる .

16.2.5 特性曲線法

特性曲線法 (method of characteristic curves) は、非定常1次元流れまたは2次元超音速流れの双曲型方程式の初期値問題を解くための数値解法である . この方法は、特性の理論に基づくもので、特性曲線と不連続で格子を作りながら特性変数を求め解を延長していくもので、流れの不連続を忠実に捕らえることができる . しかしながら粘性や温度の拡散を考慮すること、楕円型方程式との共存、多次元への拡張が難しく、またそのアルゴリズムはかなり煩雑になるため現在はほとんど使われていない . ここには、特性の理論の理解の助けに、特性同士の交叉する通常点 (ordinary points) の計算のみを示すことにする . 汎用のプログラムを作るには、ほかに界面点 (interface points)、固定、自由、負荷境界点 (edge, free surface and loaded surface points)、単純、複雑衝撃波点 (simple and complex shock points) を計算に組み込む必要があり、更にはこれらの面と面の干渉、反射、屈折、衝撃波や膨張扇の発生、圧力波からの衝撃波の生成などにも対処できるように、多種多様のサブルーチンを用意しなければならない . なお次章で、各種解法によるリーマン問題の計算結果の比較を行うが、その際に必要な厳密解は解析的に求めることができないので、本稿では

¹⁶等エントロピー流れの式を $p = k\rho^\gamma$ と置き、 $c^2 = k\gamma\rho^{\gamma-1}$ なる関係を用いれば

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho c} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho = \sqrt{k\gamma} \int \rho^{(\gamma-1)/2-1} d\rho = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{k\gamma} [\rho^{(\gamma-1)/2}]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{2}{\gamma-1} (c-c_0)$$

特性曲線法で求めている。そのプログラムは、リーマン問題の解、界面点、単純衝撃波点のサブルーチンを含むので、関心のある方はご覧いただきたい。

通常点の計算は、図 16.3 に示す点 A と点 B の特性変数が既知のときにこれらの点を通る特性曲線の交点 C の位置とその特性変数を求めることである。この計算には式 (16.24) から得られる差分方程式

$$x_C - x_D - \bar{u}(t_C - t_D) = 0 \quad (16.27a)$$

$$\rho_C - \rho_D - (\bar{1/c^2})(p_C - p_D) = 0 \quad (16.27b)$$

$$x_C - x_A - (\overline{u+c})(t_C - t_A) = 0 \quad (16.27c)$$

$$u_C - u_A + (\overline{1/\rho c})(p_C - p_A) = 0 \quad (16.27d)$$

$$x_C - x_B - (\overline{u-c})(t_C - t_B) = 0 \quad (16.27e)$$

$$u_C - u_B - (\overline{1/\rho c})(p_C - p_B) = 0 \quad (16.27f)$$

と線分 AB と点 C を通る流跡線の交点 D の位置とその関数値の補間式

$$(t_A - t_B)x_D - (x_A - x_B)t_D = x_B t_A - x_A t_B \quad (16.27g)$$

$$f_D = \frac{x_B - x_D}{x_B - x_A} f_A + \frac{x_D - x_A}{x_B - x_A} f_B \quad (16.27h)$$

が用いられる。

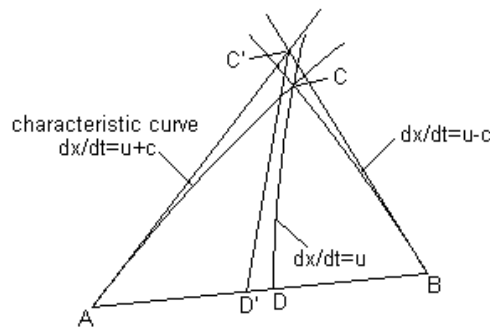


図 16.3: 特性曲線法 (通常点)

その計算は 2 次精度を確保するために次の予測子修正子法によって行われる。

1. ーの付いている量に既知の点 A または点 B の値を用い式 (16.27c) と (16.27e) から点 C' の位置 x_C, t_C の予測値を求める。次に式 (16.27d) と (16.27f) から点 C' の流速 u_C と静圧 p_C の予測値を求める。
2. ーの付いている量に既知の点 C' の値を用い、式 (16.27a) と (16.27g) から点 D' の位置 x_D, t_D の予測値を求める。次に式 (16.27h) により点 D' の ρ_D, p_D の補間値、式 (16.27b) から点 C' の密度 ρ_C の予測値を求める。なお $c^2 = \gamma p/\rho$ である。
3. ーの付いている量に点 A と C' または点 B と C' の平均値を用い、手順 1 と同様にして点 C の位置 x_C, t_C 、流速 u_C 、静圧 p_C の修正値を求める。
4. ーの付いている量に点 C' と D' の平均値を用い、手順 2 と同様にして点 D の位置 x_D, t_D の修正値、その ρ_D, p_D の値、点 C の密度 ρ_C の修正値を求める。
5. 必要に応じ手順 3, 4 の修正値の計算を繰り返す。

16.3 1次元流れの流束ベクトル分離法

圧縮性流れの解法において、2つの圧力波とエントロピー波の各伝播方向によって流束を分離し、正しく上流化する流束分離法はいくつか提案されている。本節には流束ベクトルそのものを分離する Steger-Warming の流束ベクトル分離法について述べる。その初期の論文では、流れが亜音速から超音速に変わる音速点で解が振れるという不具合が見られたが、これはこの方法の本質的欠陥によるものではなく適用上の問題である。亜音速から超音速にスムーズに移行させこの不具合を除く方法は、数値的拡散を過度に生じさせることになる。ここではまず流束ベクトル分離法とそのオイラー方程式の初期値問題への適用について述べ、それから音速点における振れの原因を探り、それを除く対策について述べる。

16.3.1 Steger-Warming の流束ベクトル分離法

流束ベクトル分離法 (flux vector splitting) は流束ベクトルそのものを特性速度の符号によって分離するものである。

$$F = F^+ + F^- \quad (16.28a)$$

$$F^\pm = A^\pm q = RA^\pm Lq \quad (= N^{-1}R^*A^\pm L^*Nq) \quad (16.28b)$$

ただし N は 16.2.2 に述べた保存形を非保存形に変換する行列、 L^* はそれを更に対角行列に変換する行列、また $R^* = L^{*-1}$ である。 A^\pm は正または負の固有値のみからなる行列で

$$A^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{pmatrix} \quad (16.29)$$

ただし

$$\lambda_k^\pm = (\lambda_k \pm |\lambda_k|)/2, \quad \lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u+c, \quad \lambda_3 = u-c$$

である。左固有ベクトルの行列 $L = L^*N$ は

$$L = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tilde{\gamma}u^2}{2c^2} & \frac{\tilde{\gamma}u}{c^2} & -\frac{\tilde{\gamma}}{c^2} \\ -\frac{u}{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\gamma}u}{2c}\right) & \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{\tilde{\gamma}u}{c}\right) & \frac{\tilde{\gamma}}{\rho c} \\ -\frac{u}{\rho}\left(1 + \frac{\tilde{\gamma}u}{2c}\right) & \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{\tilde{\gamma}u}{c}\right) & -\frac{\tilde{\gamma}}{\rho c} \end{pmatrix} \quad (16.30)$$

また右固有ベクトルの行列 $R = N^{-1}R^*$ は

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho}{2c} & -\frac{\rho}{2c} \\ u & \frac{\rho}{2c}(u+c) & -\frac{\rho}{2c}(u-c) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{\rho}{2c}(H+cu) & -\frac{\rho}{2c}(H-cu) \end{pmatrix} \quad (16.31)$$

となる。

特性変数 $w = Lq$ は次のように求められる¹⁷ .

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\tilde{\gamma}/\gamma \\ c/\gamma \\ -c/\gamma \end{pmatrix} \quad (16.32)$$

またこれより分離流束 $F^\pm = RA^\pm w$ は次のように求められる .

$$F^\pm = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm w_1 \\ \lambda_2^\pm w_2 \\ \lambda_3^\pm w_3 \end{pmatrix} = \sum_k \lambda_k^\pm w_k r^k \quad (16.33a)$$

あるいは次のようにも表わされる .

$$F^\pm = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2/2 \end{pmatrix} \lambda_1^\pm + \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ u+c \\ H+cu \end{pmatrix} \lambda_2^\pm + \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ u-c \\ H-cu \end{pmatrix} \lambda_3^\pm \quad (16.33b)$$

これは 1981 年頃に Steger と Warming¹⁸ によって提案された流束ベクトル分離法の式である . すなわち非定常 1 次元流れの保存形 Euler 方程式の場合の , 特性速度の符号によって分離された流束ベクトルの式である .

16.3.2 1次元オイラー方程式の初期値問題

ここでオイラー方程式 (16.11) の初期値問題を考える . 1次元オイラー方程式は , 梯形則 (trapezoidal law) を適用すれば次のように書き換えられる .

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + (1-\theta)F_x^n + \theta F_x^{n+1} = 0 \quad (16.34)$$

$\theta = 0$ ならば陽解法 (explicit methods) $\theta > 0$ ならば陰解法 (implicit methods) で , $\theta = 1/2$ は Crank-Nicholson 法 , $\theta = 1$ は完全陰解法である . また時間に関する精度は $\theta = 1/2$ のときにのみ 2 次で $\theta \neq 1/2$ のときは 1 次である . 周知のように , 陽解法の式は容易に解くことができるが , 不安定性のため時間間隔 Δt の大きさが厳しく制限される . 他方 陰解法の式は安定性は良いが , 直接解こうとすると大きな連立 1 次方程式を解くことになり , 最近では Δ 形陰解法で反復計算されるようになっている .

Δ 形陰解法 (delta-form implicit methods) の式は次のように書かれる .

$$\begin{aligned} \left(I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x} A \right) \Delta q^n &= -\Delta t F_x^n \\ q^{n+1} &= q^n + \Delta q^n \end{aligned} \quad (16.35)$$

この式は , 式 (16.34) の $F^{n+1} = F(q^{n+1})$ に Taylor 展開 $F(q^{n+1}) = F(q^n) + F_q(q^n)\Delta q^n + \dots = F^n + A^n \Delta q^n + \dots$ を代入することによって容易に導くことができる . 左辺の微分演算子 $\partial/\partial x$ は A だけでなく Δq^n にも

¹⁷ $p/\rho c^2 = \rho/\gamma$, $p/\rho c = c/\gamma$ を用いる . なお計算の順序を変えれば中間段階で

$$w = L^* N q = L^* \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

となり心もとないが , 結果は勿論同じで , 計算はの方が簡単である .

¹⁸ Steger, J. L. and Warming, R. F., Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite difference methods, *J. Comput. Phys.*, 40 (1981), 263-293.

作用していることに注意しなければならない．この式は通常 定常流れの解法に用いられる．そのとき右辺は元の方程式 (16.11) の残差，左辺の Δq^n は修正値を表している．したがって，右辺の差分式は解の精度と解像度に直接関わるので十分吟味して選ばなければならないが，左辺の演算子は精度には無関係で，通常 安定で簡単な 1 次上流差分が用いられる．定常解は時間の十分経過した時点における収束解として求められる．解が収束に近付けば，左辺の残差値はゼロに近付き，当然修正値 Δq^n もゼロに近づく．

次に非定常流れの初期値問題を考える．上の式 (16.35) は非定常流れに用いることもできる．しかしながら非定常流れの場合には，左辺の差分演算子も右辺と同精度のものを用いなければならないので，解くべき連立 1 次方程式の係数行列が大きくなり計算量も増大する．また時間に関する精度を確保するためには時間ステップ Δt をあまり大きく取ることができないので計算量は一層増大することになる．これに対し，別の Δ 形陰解法の式を用い各時間ステップごとに反復計算する方法もある．式 (16.34) は Crank-Nicholson 法では次のようになる．

$$q^{n+1} - q^n = -\frac{1}{2}\Delta t(F_x^n + F_x^{n+1}) \quad (16.36)$$

時間ステップ n までの未知変数ベクトル q の値が既知のときに，時間ステップ $n+1$ の q^{n+1} の値はこの式から反復法で求めることができる． $q^{(n+1)}$ の第 (m) 近似値 $q^{(m)}$ を求める式は

$$q^{(m)} - q^n = -\frac{1}{2}\Delta t(F_x^n + F_x^{(m)})$$

となる．第 $(m-1)$ 近似値 $q^{(m-1)}$ が既知のときに $q^{(m)}$ を求める式は，上式に $q^{(m)} = q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)}$ と Taylor 展開 $F_x^{(m)} = F_x^{(m-1)} + F_q^{(m-1)}\Delta q^{(m)} + \dots = F_x^{(m-1)} + A^{(m-1)}\Delta q^{(m)} + \dots$ ， $F_q = \partial F/\partial q = A$ を代入した式

$$q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)} - q^n = -\frac{1}{2}\Delta t\left\{F_x^n + F_x^{(m-1)} + \frac{\partial}{\partial x}(A^{(m-1)}\Delta q^{(m)})\right\}$$

を書換えることによって導かれる．すなわち 1 次元オイラー方程式の非定常流れの Δ 形陰解法の式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \left(I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x} A\right) \Delta q^{(m)} &= -(q^{(m-1)} - q^n) - \frac{1}{2}\Delta t(F_x^n + F_x^{(m-1)}) \\ q^{(m)} &= q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)} \end{aligned} \quad (16.37)$$

この式は時間ステップ $n+1$ の q^{n+1} の値を反復法で求める際に，その第 $(m-1)$ 近似値が既に求められているときに第 (m) 近似値を計算する式である．その第 1 近似計算では $q^{(0)} = q^n$ ， $F^{(0)} = F^n$ となるので，上式は式 (16.35) と同じになる．この非定常流れの各時間ステップごとの計算は，通常少ない反復回数で十分に収束する．この Δ 形陰解法の式でも，右辺は高精度高解像差分式を用いなければならないが，左辺は 1 次上流差分で十分である．解が収束に近付けば，左辺は Crank-Nicholson 法の式 (16.36) のものに近付き，この式の残差値はゼロに近付き，修正値 $\Delta q^{(m)}$ もゼロに近づく．この解法で解くべき連立 1 次方程式の係数行列は定常流れの場合と同じ大きさになり，また時間に関し 2 次精度が確保され時間ステップ Δt をある程度大きく取れるので，各時間ステップごとに計算を反復しても全体の計算時間は式 (16.35) で非定常流れを計算する場合に比べ十分短くなる．非定常流れの計算にはこのような Δ 形陰解法の式を用いる反復法が推奨される．

ここで保存形スキーム (conservative scheme)

$$(f_x)_i = \frac{1}{\Delta x}(h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \quad (16.38)$$

を考える．ただし $h_{i+1/2}$ は数値流束 (numerical flux) と呼ばれるもので，1次上流差分の場合には波の位相速度 $\lambda_{i+1/2}$ の符号にしたがって後退差分または前進差分が取られ

$$h_{i+1/2} = \begin{cases} f_i & (\lambda_{i+1/2} \geq 0) \\ f_{i+1} & (\lambda_{i+1/2} < 0) \end{cases} \quad (16.39)$$

また例えばレナードの2次のQUICKスキーム¹⁹では点 $x_{i+1/2}$ から見て上流側にややシフトした3点 (x_{i-1}, x_i, x_{i+1} または x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) の f の値から2次補間によって求められ

$$h_{i+1/2} = \begin{cases} (-f_{i-1} + 6f_i + 3f_{i+1})/8 & (\lambda_{i+1/2} \geq 0) \\ (3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2})/8 & (\lambda_{i+1/2} < 0) \end{cases} \quad (16.40)$$

となる．

ここではオイラーの時間差分方程式 (16.34) を陽解法 ($\theta = 0$) で解くことにする．流束分離法ではこの式の中の流束の微分 F_x は次のように差分近似される．

$$(F_x)_i = \frac{1}{\Delta x} (\nabla_x F_i^+ + \Delta_x F_i^-) \quad (16.41)$$

ただし1次上流差分では， ∇ は後退差分， Δ は前進差分の演算子を取り

$$\nabla_x F_i = F_i - F_{i-1}, \quad \Delta_x F_i = F_{i+1} - F_i$$

となる．またQUICKスキームでは，差分演算子の定義を拡大解釈すれば，

$$\begin{aligned} \nabla_x F_i &= F_{i-2} - 7F_{i-1} + 3F_i + 3F_{i+1}, \\ \Delta_x F_i &= -3F_{i-1} - 3F_i + 7F_{i+1} - F_{i+2} \end{aligned}$$

となる．流束ベクトルの式 (16.33b) を用いれば，初期値問題として解くべき式は，1次上流差分では

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \left[\sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_i - \sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_{i-1} + \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_{i+1} - \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_i \right]$$

またQUICKスキームでは

$$\begin{aligned} q_i^{n+1} = q_i^n - \Delta t \left[\sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_{i-2} - 7 \sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_{i-1} + 3 \sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_i + 3 \sum_k (\lambda_k^+ w_k r^k)_{i+1} \right. \\ \left. - 3 \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_{i-1} - 3 \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_i + 7 \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_{i+1} - \sum_k (\lambda_k^- w_k r^k)_{i+2} \right] \end{aligned}$$

となる．周知のように，1次上流差分は安定であるが数値粘性大きく精度不足で，他方QUICKスキームは3次に近い2次精度を持つが不連続のところではGibbs現象を起こし人工粘性の付加が必要である．ほかの2次以上のスキームについても同様のことがいえる．なお人工粘性の付加については多くの提案がなされてきたが，今日のTVD，ENOなどのスキームと比べ，本質的に劣り推奨できるものはないのでここでは省略する．

¹⁹Leonard, B. P., A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Meth. Appl. Meth. Engng.*, **19** (1979), 59-98.

16.3.3 音速点における振れとその対策

この項では、上記のスキームを用いて計算したときに生じる、音速点 (sonic point) 近傍における解の振れについてまずその原因を探る。今流速 $u > 0$ とし、区間 $[x_0, x_{1/2}]$ に音速点 x^* があるものとする。 $\lambda_1 = u$ と $\lambda_2 = u+c$ の符号は音速点を越えて変わらないが $\lambda_3 = u-c$ の符号は変わる。したがってここでは流束の第3成分 $f^3 \equiv \lambda_3 w_3 r^3$ についてのみ検討する。以下しばらく添字 '3' を省略する。まず1次上流差分で計算する場合には、 $\dots = f_{-1}^+ = f_0^+ = f_1^- = f_2^- = \dots = 0$ となるので、次の音速点の隣りの2点の差分式が通常のものとは異なることになる。

$$(f_x)_0 = (f_0^+ - f_{-1}^+)/\Delta x + (f_1^- - f_0^-)/\Delta x = -f_0/\Delta x$$

$$(f_x)_1 = \dots = f_1/\Delta x$$

これらの式の打ち切り誤差は Taylor 展開を基に評価すれば $O(\Delta x^0)$ になる。

また2次の QUICK スキームで計算する場合には、次の音速点近傍の4点の差分式が通常のものとは異なることになる。

$$(f_x)_{-1} = (-3f_{-2} - 3f_{-1} + 7f_0)/8\Delta x$$

$$(f_x)_0 = (-3f_{-1} - 3f_0 + 3f_1)/8\Delta x$$

$$(f_x)_1 = (-3f_0 + 3f_1 + 3f_2)/8\Delta x$$

$$(f_x)_2 = (-7f_1 + 3f_2 + 3f_3)/8\Delta x$$

これらの式の打ち切り誤差も $O(\Delta x^0)$ で²⁰、完全に破綻していることが分かる。Steger-Warming の流束ベクトル分離法で計算した結果が音速点近傍で不自然に振れるのはこの差分式の破綻による。

次にこのような差分式の破綻を回避する対策について述べる。上記の保存形スキームの式 (16.38) における数値流束 $h_{i+1/2}$ は、中間点の特性速度 $\lambda_{i+1/2}^\pm = \{\lambda_{i+1/2} \pm |\lambda_{i+1/2}|\}/2$ 、ただし $\lambda_{i+1/2} = (\lambda_i + \lambda_{i+1})/2$ 、を用い次のように置くことができる。

1次上流差分：

$$h_{i+1/2} = \lambda_{i+1/2}^+(wr)_i + \lambda_{i+1/2}^-(wr)_{i+1}$$

2次 QUICK スキーム：

$$h_{i+1/2} = \lambda_{i+1/2}^+ \frac{1}{8} \{-(wr)_{i-1} + 6(wr)_i + 3(wr)_{i+1}\}$$

$$+ \lambda_{i+1/2}^- \frac{1}{8} \{3(wr)_i + 6(wr)_{i+1} - (wr)_{i+2}\} \quad (16.42)$$

²⁰まず QUICK スキームの精度を Taylor 展開を基に評価すれば、

$$\frac{1}{8\Delta x} \left\{ \left(f - 2\Delta x f' + \frac{1}{2!}(2\Delta x)^2 f'' - \frac{1}{3!}(2\Delta x)^3 f''' + \dots \right) - 7 \left(f - \Delta x f' + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f'' - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f''' + \dots \right) \right.$$

$$\left. + 3f + 3 \left(f + \Delta x f' + \frac{1}{2!}(\Delta x)^2 f'' + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 f''' + \dots \right) \right\}$$

$$= f'_i + \frac{1}{4 \cdot 3!} (\Delta x)^2 f''_i + \dots$$

となり、このスキームは打ち切り誤差 $O(\Delta x^2)$ で2次精度であることがわかる。次に上式の例えば第3式の誤差を評価する。この場合には音速点 x^* で $f = 0$ という特別の条件があるので、 $(x_1 - x^*)/\Delta x = \alpha$ と置き、まず点 x^* 周りの Taylor 展開をこの式に代入することにすれば、

$$\frac{1}{8\Delta x} \{-3((\alpha-1)\Delta x f' + \dots) + 3(\alpha\Delta x f' + \dots) + 3((\alpha+1)\Delta x f' + \dots)\} = \frac{6+3\alpha}{8} f'^* + \dots = f'_1 + \frac{3\alpha-2}{8} f'_1 + \dots$$

となり、打ち切り誤差は $O(\Delta x^0)$ になる。

これらの式は流束成分 $h_{i+1/2}$ を特性速度の符号によって上下いずれかの式によって計算するものである。

音速点が上記のように区間 $[x_0, x_{1/2}]$ にあるものとすれば, $\dots = \lambda_{3/2}^+ = \lambda_{-1/2}^+ = \lambda_{1/2}^- = \lambda_{3/2}^- = \dots = 0$ となり, $(f_x)_i$ の差分式は唯一 点 x_0 のものが通常のものとは異なることになる。

1 次上流差分:

$$(f_x)_0 = \frac{1}{\Delta x} [\lambda_{1/2}(wr)_0 - \lambda_{-1/2}(wr)_0]$$

2 次 QUICK スキーム:

$$(f_x)_0 = \frac{1}{8\Delta x} \left[\lambda_{1/2} \{ -(wr)_{-1} + 6(wr)_0 + 3(wr)_1 \} \right. \\ \left. - \lambda_{-1/2} \{ 3(wr)_{-1} + 6(wr)_0 - (wr)_1 \} \right]$$

1 次上流差分の式は一見してだめであるが, QUICK スキームの方は使えるかどうか分からないので, Taylor 展開を基に評価することにする。 $wr = u$ と置き, これらの変数の点 x_0 まわりの Taylor 展開を上式に代入すれば

$$\frac{1}{8\Delta x} \{ \lambda_{1/2}(-u_{-1} + 6u_0 + 3u_1) - \lambda_{-1/2}(3u_{-1} + 6u_0 - u_1) \} \\ = \frac{1}{8\Delta x} \left[\left\{ \lambda + \frac{\Delta x}{2}\lambda' + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\lambda'' + \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\lambda''' + \dots \right\} \left(8u + 4\Delta x u' + 2\frac{1}{2!}\Delta x^2 u'' + 4\frac{1}{3!}\Delta x^3 u''' + \dots \right) \right. \\ \left. - \left\{ \lambda - \frac{\Delta x}{2}\lambda' + \frac{1}{2!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\lambda'' - \frac{1}{3!}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\lambda''' + \dots \right\} \left(8u - 4\Delta x u' + 2\frac{1}{2!}\Delta x^2 u'' - 4\frac{1}{3!}\Delta x^3 u''' + \dots \right) \right] \\ = (\lambda u)' + \frac{1}{8} \left(-\frac{4}{3}\lambda u''' + \lambda' u'' - \lambda'' u' + \frac{1}{6}\lambda''' u \right) \Delta x^2 + \dots = (f_x)_0 + O(\Delta x^2)$$

のようになる。これより流束の式 (16.42) を用いれば QUICK スキームは音速点のところでも 2 次精度を保つことが分かる。式 (16.42) はもちろん流束成分 f^1, f^2 に対しても成立する。したがって Steger-Warming の流束ベクトル分離法は, 例えば QUICK スキームを少し修正した次式を用いることによって, 音速点のところでも適正な結果の得られるものに変えることができる。

$$(F_x)_i = \frac{1}{\Delta x} (H_{i+1/2} - H_{i-1/2}) \quad (16.43)$$

$$H_{i+1/2} = \sum_k (\lambda_k^+)_{i+1/2} \{ -(w_k r^k)_{i-1} + 6(w_k r^k)_i + 3(w_k r^k)_{i+1} \} / 8 \\ + \sum_k (\lambda_k^-)_{i+1/2} \{ 3(w_k r^k)_i + 6(w_k r^k)_{i+1} - (w_k r^k)_{i+2} \} / 8$$

2 次上流差分や, 2 次の上流差分と中心差分の 1 次結合を取った Chakravarthy-Osher 型スキームも, 音速点のところでも上記のように処理すれば, 2 次精度を保たせることができ, また解の振れも防止できる。

16.4 1次元流れの流束差分分離法

本節では始めに，簡単なスカラー輸送方程式の初期値問題の1次上流差分スキームに関して，TVD，TVDスキーム，エントロピー条件などを一通り説明する．次に Chakravarthy-Osher TVD スキームについて述べる．流束差分分離法は，波の位相速度の符号によって異なる流束の差分の式を用いるものである．まずスカラー輸送方程式に対しこのスキームの TVD 条件を明確にし，次にオイラー方程式に対し分離された流束差分を示しこのスキームの Δ 形陰解法への適用について述べる．

16.4.1 TVD スキームとは

ここではまず簡単なスカラー輸送方程式の初期値問題に対して TVD の概念を説明する．スカラー量 $u(x, t)$ の輸送方程式は次のように表される．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (16.44)$$

ただし f は u のみの関数である．式 (16.44) は線形化すれば次のようになる．

$$u_t + au_x = 0 \quad (16.45)$$

ただし $a(u) = \partial f / \partial u$ ．なお式 (16.45) は $(\partial / \partial t + a \partial / \partial x)u = 0$ のようにも書くことができ，微分演算子 $\partial / \partial t + a \partial / \partial x$ は xt 面上の特性曲線 $dx / dt = a$ に沿う内微分で，したがって式 (16.45) は1つの微分演算子のみを含み，常微分方程式である．式 (16.45) はまた解 $u(x, t)$ の値が各特性に沿って一定になることを示している．したがってこの初期値問題では，一般に u の最大値最小値は時間によらず一定になり，また

$$TV \equiv \int |u_x| dx \quad (16.46)$$

で定義される総変化量 (total variation) TV も時間によらず一定になる．

しかしながら図 16.4 に示すように不連続が存在し，そこに特性曲線が吸込まれ，最大値が減少，最小値が増加するときには， TV は時間と共に減少する²¹．なお逆に不連続から特性曲線が吐出され， TV が時間

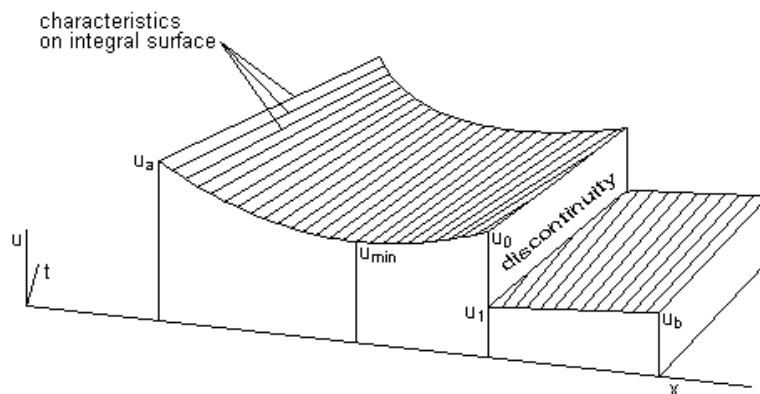


図 16.4: xtu 空間内の積分曲面上の特性と不連続

²¹ 積分の範囲は1つの特性曲線から別の特性曲線まで取る．図の場合には，左側の特性の値 u_a ，右側特性 u_b ，極小特性 u_{\min} ，不連続の左側の特性の値 u_0 ，その右側の特性 u_1 とすれば， $TV = |u_{\min} - u_a| + |u_0 - u_{\min}| + |u_b - u_1|$ となる．

と共に増加することは、後に述べるようにエントロピー条件により物理的に起こり得ない。すなわち TV は時間と共に増加することはない、TVD(total variation diminishing) である。式 (16.46) で定義される TV は離散近似後には

$$TV \equiv \sum_i |u_{i+1} - u_i| \tag{16.47}$$

となる。また TVD 条件は²²

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \tag{16.48}$$

となる。ただし $u_i^n = u(x_i, t^n)$ である。この条件のもとでは解は、最大値が更に増加、最小値が更に減少することは許されず、また新たに極値の発生する余地もなく、解の単調性は保たれる。TVD スキームと呼ばれるものは、それを使って求めた解が条件式 (16.48) を満足することを保証するもので、その解は当然安定になる。

式 (16.44) の離散スキームは一般に保存形で次のように書くことができる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(h_{i+1/2} - h_{i-1/2}) \tag{16.49}$$

ただし $\lambda = \Delta t / \Delta x$, また h は数値流束関数 (numerical flux function) あるいはたんに数値流束と呼ばれるものである。不連続を捕獲する際には、ここで保存性が保たれるように保存性スキームを用いなければならない。式 (16.44) の解曲面 $u = u(x, t)$ 上には 1 パラメータ族の特性 (one parameter family of characteristics) $dx/dt = a$ が存在する²³。1 次精度のスキームでは区間 $[x_i, x_{i+1}]$ を通過する特性を図 16.5(a) に示すように点 $x_{i+1/2}$ に集め不連続として扱うことができる。このとき数値流束は次のように表される。

$$h_{i+1/2} = f_i + \int_{u_i}^{u_{i+1}} a^-(u) du = f_i + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2} \tag{16.50a}$$

$$h_{i+1/2} = f_{i+1} + \int_{u_{i+1}}^{u_i} a^+(u) du = f_{i+1} - a_{i+1/2}^+ \Delta u_{i+1/2} \tag{16.50b}$$

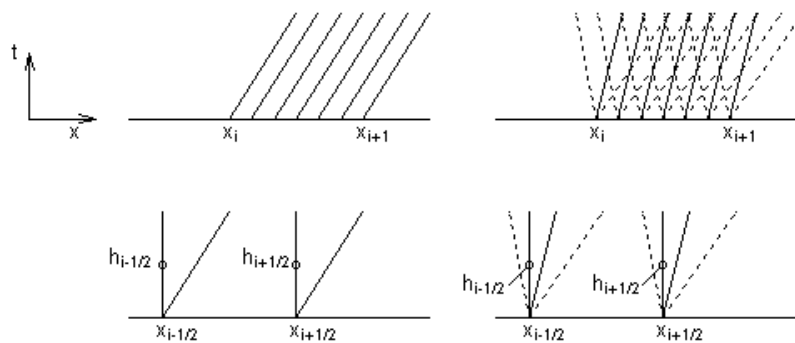


図 16.5: 特性と等価な不連続

²² Harten, A., High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, **49**(1983), 357-393.

²³ 微分方程式 (16.44) は解 $u(x, t)$ の勾配 $\nabla u = (u_x, u_t)$ とベクトル $\mathbf{a} \equiv (a, 1)$ が直交しスカラー積が 0 になることを示している。微分演算子 $d/dt = \mathbf{a} \cdot \nabla$ は \mathbf{a} 方向の微分で、 u をこの方向に微分したときに 0 ということは、 u が \mathbf{a} 方向に一定ということである。曲線 $u(x, t) = \text{const.} \equiv c$ を特性曲線という。曲線 $u(x, t) = c + \delta c$ も曲線 $u(x, t) = c$ にほぼ平行な特性曲線である。 c の値を次々に変えれば c を 1 つのパラメータとする特性曲線族が得られる。

ただし $\Delta u_{i+1/2} = u_{i+1} - u_i$, $a^\pm = (a \pm |a|)/2$

$$a_{i+1/2} = \begin{cases} (f_{i+1} - f_i)/\Delta u_{i+1/2} & (\Delta u_{i+1/2} \neq 0) \\ a(u_i) & (\Delta u_{i+1/2} = 0) \end{cases} \quad (16.51)$$

1次元オイラー方程式の場合には、3組の1パラメータ族の特性(流跡線と2つの圧力波, $dx/dt = u, u \pm c$)が存在する。この場合にも1次精度のスキームでは区間 $[x_i, x_{i+1}]$ を通過する特性を図16.5(b)に示すように点 $x_{i+1/2}$ に集め不連続として扱うことができる。このような双曲型方程式では、数値流束 $h_{i+1/2}$ は区間 $[x_i, x_{i+1}]$ を通るすべての特性の上流側に取られる。なお右側の不連続の図において f の値は不連続の間とその両側の各領域においてそれぞれ一定になり、 f の1つの不連続を横切ったの跳躍量はその不連続に沿ってそのまま伝播することになる。

式(16.50)の2つの式は等価であるが Engquist-Osher スキーム²⁴では、対称性を持たせるために、これらの式の平均が取られる。

$$h_{i+1/2}^{EO} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{2} \int_{u_i}^{u_{i+1}} |a(u)| du \quad (16.52)$$

また Roe スキーム²⁵ではこれらの式を差分表示したものの平均が取られる。

$$h_{i+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{2} |a_{i+1/2}| \Delta u_{i+1/2} \quad (16.53)$$

式(16.49)に式(16.50)の数値流束を用いれば次の差分方程式が得られる。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2}) \quad (16.54)$$

この式は a が正ならば後退差分、負ならば前進差分になり、1次上流差分スキームである。

式(16.54)の安定性をノイマンの方法で調べれば、増幅率が

$$r = 1 - |C| (1 - \cos k \Delta x) - \sqrt{-1} C \sin k \Delta x$$

となり、クーラン数 $C = a \Delta t / \Delta x$ の大きさが1よりも小ならば安定であることが分かる。次に式(16.54)のTVD安定性を式(16.54)のTVを取って調べる。 $\text{sign} \Delta u = S$ と置けば、 $S_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) = |u_{i+1} - u_i|$ であるから

$$\begin{aligned} & TV(u^{n+1}) - TV(u^n) \\ &= -\lambda \sum_i S_{i+1/2} \{ -a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + (a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-) \Delta u_{i+1/2} + a_{i+3/2}^- \Delta u_{i+3/2} \} \\ &= -\lambda \sum_i \{ (S_{i+1/2} - S_{i+3/2}) a_{i+1/2}^+ + (S_{i-1/2} - S_{i+1/2}) a_{i+1/2}^- \} \Delta u_{i+1/2} \end{aligned}$$

$a_{i+1/2}^+$ の係数は $\Delta u_{i+1/2}$ と $\Delta u_{i+3/2}$ が同符号ならば0、異符号ならば負、また $a_{i+1/2}^-$ の係数についても同様のことが言える。したがって上式の値は0または負になり、式(16.54)は式(16.48)の条件を満足するTVDスキームであることが分かる。

²⁴ Engquist, B. and Osher, S., Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comput.*, **34**(1980), 45-75.

Engquist, B. and Osher, S., One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws. *Math. Comput.*, **36**(1981), 321-52.

²⁵ Roe, P. L., The use of Riemann problem in finite difference schemes. *Lecture Notes in Physics*, Vol.141, (1981), 354-9, Berlin, Springer-Verlag.

Roe, P. L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, **43**(1981), 357-72.

式 (16.44) は梯形則を用い保存形差分方程式に書換えれば次のようになる .

$$u_i^{n+1} + \theta \lambda (h_{j+1/2} - h_{i-1/2})^{n+1} = u_i^n - (1-\theta) \lambda (h_{i+1/2} - h_{i-1/2})^n \quad (16.55)$$

式 (16.55) に式 (16.50) の数値流束を用いれば次の差分方程式が得られる .

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} + \theta \lambda (a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2})^{n+1} \\ = u_i^n - (1-\theta) \lambda (a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2})^n \end{aligned} \quad (16.56)$$

ここで式 (16.56) の右辺の TV を取れば

$$TV(rhs) = \sum_i \left| \{1 - (1-\theta) \lambda |a_{i+1/2}|\} \Delta u_{i+1/2} + (1-\theta) \lambda (a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} - a_{i+3/2}^- \Delta u_{i+3/2}) \right|^n$$

したがって , もし

$$a^+ \geq 0, \quad a^- \leq 0, \quad (1-\theta) \lambda |a| \leq 1 \quad (16.57)$$

ならば

$$\begin{aligned} TV(rhs) &\leq \sum_i \left[\{1 - (1-\theta) \lambda |a_{i+1/2}|\} |\Delta u_{i+1/2}| + (1-\theta) \lambda (a_{i-1/2}^+ |\Delta u_{i-1/2}| - a_{i+3/2}^- |\Delta u_{i+3/2}|) \right]^n \\ &= \sum_i |\Delta u_{i+1/2}^n| = TV(u^n) \end{aligned}$$

次に式 (16.56) の左辺の TV を取れば , 同様にして $TV(lhs) \geq TV(u^{n+1})$ なる関係が得られる . 以上をまとめれば , 1 次上流差分の式 (16.56) は , クーランの条件に相当の条件式 (16.57) のもとで

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(lhs) = TV(rhs) \leq TV(u^n)$$

となり , 式 (16.48) の TVD 条件を満足する TVD スキームであることが分かる . 式 (16.57) の第 1 式と第 2 式は常に満足されるもので , 第 3 式はクーラン数 $|a| \Delta t / \Delta x$ または時間間隔 Δt の大きさを制限する条件である . なお $\theta = 1$ の完全陰解法では , 式 (16.56) はクーラン数によらず TVD 安定である .

ここで一言付け加えれば , TVD 条件 (16.48) は同次方程式 (16.44) に対して成立するものである . 非同次方程式 $du/dt = g$ の場合には , この方程式を一つの特性 $dx/dt = a$ に沿って積分すれば , $u = u_0 + \int_{t_0}^t g dt$ になることから明らかのように , u の値は特性に沿って一定にはならず , 当然 TVD 条件も成立しない . 1 次元オイラー方程式の場合には , 特性の理論によって同次の常微分方程式の系に置換えることができ , 各式に対し TVD 条件が成立する . しかし多次元の場合には , たとえ もとの方程式が同次であっても , 因子化で得られた 1 次元の方程式は同次でないので TVD 条件は成立しない . TVD 条件が成立しない場合でも , 特性の理論によって常微分方程式の系に置換え , 流束分離し , TVD スキームを用いれば安定に解を求めることができる . なお TVD スキームで TVD 条件が適用される量は , 式 (16.44) の u に相当するエントロピー , リーマン不変量 , スカラー量などで , その他の量は間接的に制限されるに過ぎない . またこれらの量も非同次の場合には右辺の時間積分が加算され増減することになる .

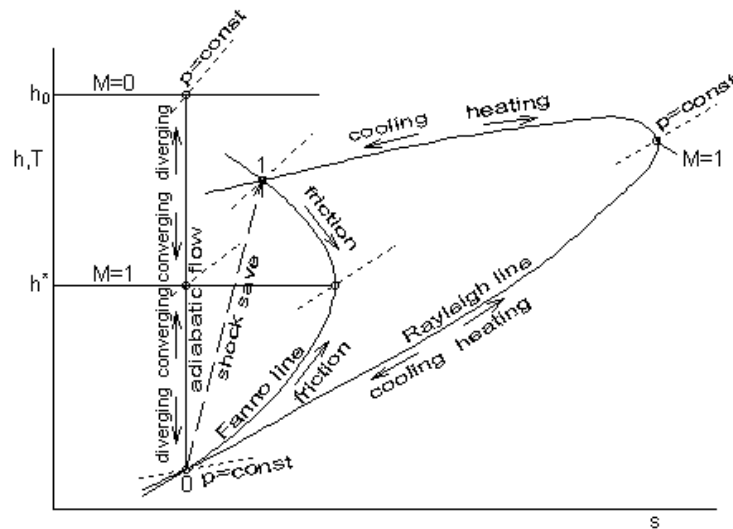


図 16.6: エンタルピー - エントロピー線図上の基本的プロセス曲線

16.4.2 エントロピー条件とは

衝撃波のところでは質量，運動量，エネルギーの保存則により，1次元流れでは次の Rankine-Hugoniot の関係が成立する．

$$[\rho u] - C[\rho] = 0 \quad (16.58a)$$

$$[\rho u^2 + p] - C[\rho u] = 0 \quad (16.58b)$$

$$[(e+p)u] - C[e] = 0 \quad (16.58c)$$

ただし C は衝撃波の伝播速度， $[f] = f_1 - f_0$ は衝撃波を横切ったの f の跳躍量である．衝撃波は式 (16.58) を満足する 2 つの異なる状態の間で，エントロピー s の増大する方向に起きる．

ここで定常 1 次元流れの 3 つの基本的な流れ，管断面積の変化する等エントロピー流れ，管断面積一定で摩擦の作用する流れ，管断面積一定で加熱冷却のある流れを考える．図 16.6 はこれらの流れのプロセスをエンタルピー - エントロピー線図上に表したものである．図の点 0 は超音速の状態にある．等エントロピー流れの場合には，この点は収縮拡大ノズルの下流側の点に相当し，この流れは h 軸に平行な線で表される．スロート部で $M = 1$ ，この線の上限は岐点状態 $M = 0$ である．一般に亜音速では断面積の増減によってマッハ数は減少または増加し，一方超音速では断面積の増減によってマッハ数も増加または減少する．摩擦の作用する流れは Fanno 線で示され，流れと共にエントロピーは増大する．また亜音速ではマッハ数が増加，圧力が降下，逆に超音速ではマッハ数が減少，圧力が上昇する．加熱冷却のある流れは Rayleigh 線で示され，加熱冷却によってエントロピーは増加または減少する．その高亜音速域には加熱時に温度が低下するけったいなところあるんやで．ほんまかいな！Fanno 線と Rayleigh 線のエントロピー極大点は，チョーキング (choking) を起こしている長大管または加熱管の出口で，ここで $M = 1$ である．

図 16.6 の点 0 が衝撃波の超音速側の状態とすれば，点 0 を通る Fanno 線と Rayleigh 線の亜音速域における交点 1 はこの衝撃波の亜音速側の状態になる．なぜならば，Fanno 線上ではエネルギーが保存され，一方 Rayleigh 線上では運動量が保存され，またこれらの線上では質量も保存されるので，点 0 と点 1 の諸量は Rankine-Hugoniot の関係を満足する．なお点 1 のエントロピーは点 0 のものよりも大きく，点 0 から点 1 に向かう圧縮衝撃波は起きるが，点 1 から点 0 に向かう膨張衝撃波は物理的に起こり得ないことになる．

図の縦軸は比エンタルピー h と同時に絶対温度 T , 比内部エネルギー ϵ , 音速 c^2 を表わすもので, また静圧 p は, 右下から左上に上昇し, その等高線の一部が破線で示されている. 実在の気体では衝撃波を横切って跳躍量 $[h], [T], [c], [\rho], [p]$ は増加し, また式 (16.58a) により $[|u-C|]$ は減少する. 1次元流れでは, 前述のように3組の特性曲線族 $dx/dt = u, u \pm c$ が存在するが, 衝撃波はその内の1つの圧力波によって起きる.

簡単のためまず定在衝撃波 $C = 0$ を考える. 衝撃波を横切って状態は0から1に変化するものとする. 連続の条件から u_0 と u_1 は同符号で, またエントロピー増大の法則から上記のように $c_0 < c_1, |u_0| > |u_1|$ である. 圧力波が $u+c$ か $u-c$ か, また流れの方向が $u > 0$ か $u < 0$ かの4通りの場合が考えられるが, 衝撃波を起こすのは次の2つである.

- (a) $\lambda = u-c, u > 0$
- (b) $\lambda = u+c, u < 0$

(a) の場合には $u_0 > u_1 > 0$ で, $u_0 - c_0 > u_1 - c_1$ となるが, 状態0が超音速, 状態1が亜音速であるから $u_0 - c_0 > 0 > u_1 - c_1$ なる関係が導かれる. 同様に (b) の場合には $u_0 < u_1 < 0, u_0 + c_0 < u_1 + c_1$ で, $u_1 + c_1 > 0 > u_0 + c_0$ なる関係が導かれる. 残りの $\lambda = u+c, u > 0$ の場合は, $u_0 + c_0, u_1 + c_1 > 0$, また $\lambda = u-c, u < 0$ の場合は, $u_0 - c_0, u_1 - c_1 < 0$ となり, これらの圧力波は衝撃波を正または負の方向に通過する波であることが分かる.

移動衝撃波 $C \neq 0$ では, 連続の条件から $u_0 - C$ と $u_1 - C$ が同符号, またエントロピー増大の法則から $c_0 < c_1, |u_0 - C| > |u_1 - C|$ となる. 移動衝撃波の場合にも衝撃波から見れば同じ関係が成立つので, 定在衝撃波の場合の u を $u-C$ と読みかえれば良いことになる. $u+c$ か $u-c$ か, また $u-C > 0$ か $u-C < 0$ かの4通りの場合が考えられるが, 衝撃波を起こすのは $\lambda = u-c, u-C > 0$ と $\lambda = u+c, u-C < 0$ の2つで, それぞれに対し

$$\begin{aligned} u_0 - c_0 &> C > u_1 - c_1, \\ u_1 + c_1 &> C > u_0 + c_0 \end{aligned}$$

なる関係が導かれる. 衝撃波の左右の圧力波の位相速度を a_L, a_R とすれば, 上の2つの式はまとめて次のように書くことができる.

$$a_L > C > a_R \tag{16.59}$$

この式はエントロピー条件と呼ばれ, 衝撃波にその左右の圧力波が吸込まれることを表している. 常にこのようになるということは不連続からその左右に圧力波が吐出される膨張衝撃波の存在を否定するものである.

逆に, 保存の関係 (16.58) を満足する不連続で, エントロピー条件 (16.59) が満足されれば, この不連続を横切ってエントロピーの増大することが証明される. 実在気体で保存の関係が成立すれば, 跳躍量 $[c], [\rho], \dots$ は同符号を取り, また $[|u-C|]$ とは異符号を取る. ここでも簡単のためまず定在衝撃波 $C = 0$ を考える. エントロピー条件は2つあるが $u_0 - c_0 > 0 > u_1 - c_1$ に対しては $u > 0$ で, 次の3通りの可能性がある.

- (a) $u_0 > u_1$ and $c_0 < c_1$
- (b) $u_0 > u_1$ and $c_0 > c_1$
- (c) $u_0 < u_1$ and $c_0 < c_1$

しかしながら (b) と (c) は $[c]$ と $[u]$ が同符号で保存の関係を満足しないので, (a) だけが起こり得ることになり, この不連続を横切って音速が増加し, 図 16.6 から明らかなように, 保存の関係を満足する不

連続ではエントロピーも増加することになる．移動衝撃波 $C \neq 0$ では，上記の u を $u-C$ と読みかえれば，エントロピー条件 $u_0 - c_0 > C > u_1 - c_1$ に対して $u_0 - C > u_1 - C$ かつ $c_0 < c_1$ だけが起こり得ることになり，音速が増加，保存の関係を満足する不連続ではエントロピーも増加することになる．もうひとつのエントロピー条件についても同様のことが言える．

この項ではこれから先，Osher の E スキームとは，E スキームでない 1 次上流差分は音速点でエントロピー条件を満足しなくなることを，またその対策について一通り述べる．これらの 2 次以上の TVD スキームとの関わりについては場合による．はじめに 1 次精度の TVD 単調スキームである 1 次上流差分の性質を考察する．流束関数 $f(u)$ が凸関数 $f_{uu} > 0$ で， $f_u = a > 0$ の膨張波を考える．膨張波では， xt 面上の特性曲線が時間と共に開くことから分かるように $a_0 < a_1$ である． $a > 0$ のところでは数値流束 $h_{1/2} = f_0$ で，また図 16.7 に示す $f-u$ 線図からも明らかなように， $\Delta u_{1/2} = u_1 - u_0 > 0$ で， u_0 と u_1 の間の任意の u に対し $h_{1/2} < f(u)$ である．他の場合もまとめて書けば次のようになる．

$$\begin{aligned} \text{膨張波} & \begin{cases} f_{uu} > 0: & \Delta u_{1/2} > 0, h_{1/2} < f(u) \\ f_{uu} < 0: & \Delta u_{1/2} < 0, h_{1/2} > f(u) \end{cases} \\ \text{圧縮波} & \begin{cases} f_{uu} > 0: & \Delta u_{1/2} < 0, h_{1/2} > f(u) \\ f_{uu} < 0: & \Delta u_{1/2} > 0, h_{1/2} < f(u) \end{cases} \end{aligned}$$

これより 1 次上流差分スキームに関し次の関係が得られる．

$$[h_{1/2} - f(u)] \text{sign}(\Delta u_{1/2}) \leq 0 \quad (16.60)$$

式 (16.60) の条件は Osher²⁶ によって提示されたもので，数値流束 $h_{1/2}$ がこの条件を満足するスキームを E スキームと呼ぶ．

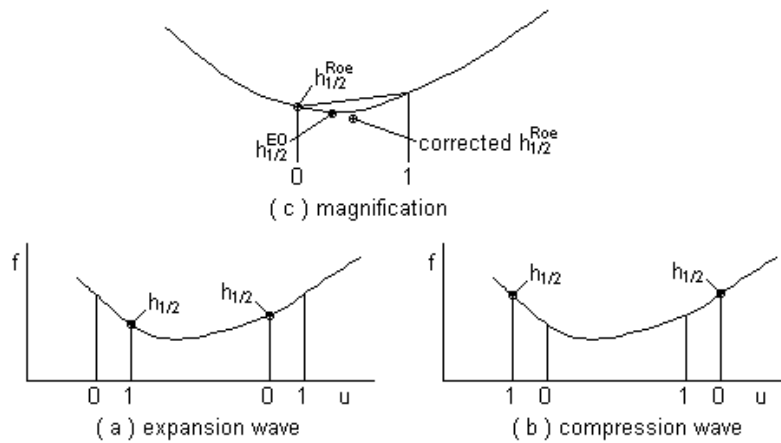


図 16.7: 1 次上流差分スキームの $h_{1/2}$

TVD スキームの解はエントロピー条件を必ずしも満足しないが，E スキームの解は TVD でエントロピー条件を満足する．図 16.7 は $f_{uu} > 0$ の場合の $f-u$ 線図で，数値流束 $h_{1/2}$ の値が ● 印で示されている．Engquist-Osher スキームと Roe スキームの数値流束の値は一般には同じで，これらのスキームは E スキームの条件 (16.60) を満足する．しかしながら音速点 $a = 0$ のところでは拡大図 (c) に示すよ

²⁶Osher, S., Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **21**(1984), 217-35.

うに違うものになり，Engquist-Osher スキームはここでも E スキームの条件を満足するが，Roe スキームは満足しなくなる．次に数値的膨張衝撃波の発生のメカニズムについて説明する．今 $f_{uu} > 0$ ，音速点が $x_0 < x^* < x_1$ にあり， $a_{1/2} = (f_1 - f_0)/\Delta u_{1/2} > 0$ とする．このとき Roe スキームの数値流束は $h_{-3/2} = f_{-1}$ ， $h_{-1/2} = h_{1/2} = f_0$ ， $h_{3/2} = f_1$ となる．したがって $u_0^{n+1} = u_0^n - \lambda(h_{1/2} - h_{-1/2}) = u_0^n$ となり， u_0 の値は時間によらず一定になる．一方 $u_1^{n+1} = u_1^n - \lambda(h_{3/2} - h_{1/2})$ であるが， $h_{3/2} - h_{1/2} = f_1 - f_0 > 0$ で， u_1 の値は $h_{3/2} \rightarrow h_{1/2}$ になるまで時間と共に減少し以後変化しなくなる．スカラー輸送方程式では，膨張波の音速点を挟んで u の初期不連続が維持されるだけであるが，他の方程式で不連続量が増加するようであれば，膨張衝撃波に発達する可能性がある．

Roe スキームも，膨張波の音速点で

$$|a_{1/2}|_m \geq \frac{f_0 + f_1 - 2f^*}{\Delta u_{1/2}}$$

で定義される修正特性速度を用いれば E スキームになる．このとき $h_{1/2} \leq f^*$ ，また $u_0, u_1 \rightarrow u^*$ になり， u の初期不連続は消え，ここに膨張扇が形成され，エントロピー条件 (16.59) の破綻することはない．実際の計算には，例えば次の修正特性速度の式が用いられている²⁷．

$$|a_{1/2}|_m = \begin{cases} |a_{1/2}| & (|a_{1/2}| \geq \epsilon) \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{(a_{1/2})^2}{\epsilon} + \epsilon \right\} & (|a_{1/2}| < \epsilon) \end{cases} \quad (16.61)$$

ただし， $\epsilon = \max[0, a_{1/2} - a_0, a_1 - a_{1/2}]$ ．なお圧縮衝撃波では $\epsilon = 0$ になり， a は修正されない．

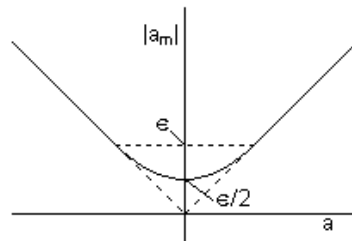


図 16.8: 修正特性速度

16.4.3 Chakravarthy-Osher TVD スキーム

Chakravarthy-Osher スキームは，2 次中心差分と 2 次上流差分の 1 次結合を取ったもので，その数値流束は次のように表される．

$$h_{i+1/2}^{CO} = \underbrace{h_{i+1/2}^{Roe}}_{\text{Roe スキーム}} + \underbrace{\frac{1-\kappa}{4} \Delta f_{i-1/2}^+}_{\text{2 次上流差分補正}} + \underbrace{\frac{1+\kappa}{4} \Delta f_{i+1/2}^+}_{\text{2 次中心差分補正}} \quad (a_{1/2} \geq 0)$$

$$- \underbrace{\frac{1-\kappa}{4} \Delta f_{i+3/2}^-}_{\text{2 次上流差分補正}} - \underbrace{\frac{1+\kappa}{4} \Delta f_{i+1/2}^-}_{\text{2 次中心差分補正}} \quad (a_{1/2} < 0) \quad (16.62)$$

この式の κ は結合のパラメータで $\kappa = -1$ は 2 次上流差分， $\kappa = 1$ は 2 次中心差分になる．また $\kappa = 1/3$ は 3 次上流差分， $\kappa = 1/2$ は Leonard の QUICK スキームになる．数学的には $\kappa = 1/3$ 以外は 2 次精度ということ

²⁷Harten, A. and Hyman, J. M., Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, **50** (1983), 235-69.

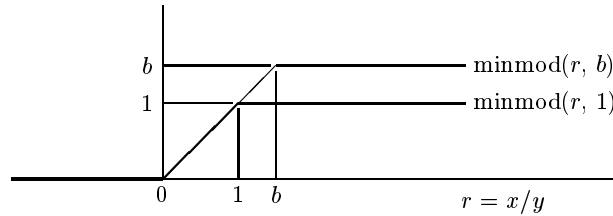
になるが，計算結果の精度は κ の値によって突然変わることはないから，QUICK スキームを 3 次精度とするのも一理ある． $h_{i+1/2}^{Roe}$ は 1 次の Roe スキームの数値流束で，この式は，[一般化された 2 次スキーム] = [Roe スキーム] + [補正項]，という形に表されている． Δf^\pm は，各波の位相速度の符号によって分離された流束の差分を表している．

Chakravarthy-Osher TVD スキームについて述べる．2 次以上の上流差分スキームは，まず上記のように 1 次上流差分とこれを 2 次にする補正項の和で表し，次に補正項の大きさを制限することによって TVD 化される．すなわち 1 次上流差分スキームはもともと TVD なので，補正項の大きさを，制限関数を導入し全体のスキームが TVD 条件 (16.48) を満足する範囲に制限すれば実現できる．Chakravarthy-Osher TVD スキームの数値流束は次のように表される．

$$\begin{aligned} h_{i+1/2} &= h_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1-\kappa}{4} \Delta \tilde{f}_{i-1/2}^+ + \frac{1+\kappa}{4} \Delta f_{i+1/2}^+ - \frac{1-\kappa}{4} \Delta \tilde{f}_{i+3/2}^- - \frac{1+\kappa}{4} \Delta \tilde{f}_{i+1/2}^- & (16.63) \\ \Delta \tilde{f}_{j+1/2}^\pm &= \min\text{mod}(\Delta f_{j+1/2}^\pm, b \Delta f_{j-1/2}^\pm) & (j = i, i+1) \\ \Delta \tilde{f}_{j+1/2}^\pm &= \min\text{mod}(\Delta f_{j+1/2}^\pm, b \Delta f_{j+3/2}^\pm) & (j = i-1, i) \end{aligned}$$

ただし $\min\text{mod}$ (minimum-modulus) 制限関数 (limiter) は次式で定義され下図のようになる．

$$\begin{aligned} \min\text{mod}(x, y) &= \text{sign}(x) \max[0, \min\{|x|, \text{sign}(x)y\}] \\ &= \begin{cases} x & (|x| \leq |y|, x, y \text{ 同符号}) \\ y & (|x| > |y|, x, y \text{ 同符号}) \\ 0 & (x, y \text{ 異符号}) \end{cases} \end{aligned}$$



式 (16.63) は $\min\text{mod}$ 関数が働かなければ式 (16.62) と同じである．しかしながら，当該勾配を隣接勾配と比較するとき符号が違えば， $\min\text{mod}$ 関数が働きその勾配は 0 になり，数値流束は 1 次上流差分のものに切替わる．また勾配の符号は同じでもその大きさが極端に違い大きければ， $\min\text{mod}$ 関数が働き当該勾配の大きさは TVD になる範囲に制限される．このように関数の勾配を制限するものを勾配制限関数 (slope limiter) とする．ここでは式 (16.63) の中の勾配をすべて $\Delta f_{j+1/2} = \Delta a_{i+1/2} \Delta u_{j+1/2}$, $j = i, i \pm 1$ のように置く．これは，前節に述べたように， a の符号が変わる音速点や衝撃波のところで，式 (16.63) が破綻するのを避けるためである．このとき式 (16.63) の数値流束は次のようになる．

$$\begin{aligned} h_{i+1/2} &= a_{i+1/2}^+ \left\{ u_i + \frac{1-\kappa}{4} \min\text{mod}(\Delta u_{i-1/2}, b \Delta u_{i+1/2}) + \frac{1+\kappa}{4} \min\text{mod}(\Delta u_{i+1/2}, b \Delta u_{i-1/2}) \right\} \\ &\quad + a_{i+1/2}^- \left\{ u_{j+1} - \frac{1-\kappa}{4} \min\text{mod}(\Delta u_{i+3/2}, b \Delta u_{i+1/2}) - \frac{1+\kappa}{4} \min\text{mod}(\Delta u_{i+1/2}, b \Delta u_{i+3/2}) \right\} \end{aligned}$$

このスキームの精度は， $\kappa = 1/3$ で $\min\text{mod}$ 関数が働かないときにも数学的には 2 次に止まるが，線形化後のスカラー輸送方程式 (16.45) が準線形で a はその係数であるから，このような a の取り扱いによって精度は実質的には変わらない．

次に勾配を比較するときに隣接勾配に掛ける倍率 b の大きさを TVD 条件 (16.48) から決定する．差分方程式 (16.55) に上記の数値流束を代入すれば，その右辺は

$$\begin{aligned}
rhs &= u_i^n - (1-\theta)\lambda \left[a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2} \right. \\
&\quad + \frac{1-\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^+ \minmod(r_{i-1/2}^+, b) \Delta u_{i+1/2} - a_{i-1/2}^+ \minmod(r_{i-3/2}^+, b) \Delta u_{i-1/2} \} \\
&\quad + \frac{1+\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^+ \minmod(r_{i+1/2}^-, b) \Delta u_{i-1/2} - a_{i-1/2}^+ \minmod(r_{i-1/2}^-, b) \Delta u_{i-3/2} \} \\
&\quad - \frac{1-\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^- \minmod(r_{i+3/2}^-, b) \Delta u_{i+1/2} - a_{i-1/2}^- \minmod(r_{i+1/2}^-, b) \Delta u_{i-1/2} \} \\
&\quad \left. - \frac{1+\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^- \minmod(r_{i+1/2}^+, b) \Delta u_{i+3/2} - a_{i-1/2}^- \minmod(r_{i-1/2}^+, b) \Delta u_{i+1/2} \} \right]^n \\
&= u_i^n - (1-\theta)\lambda \left[a_{i-1/2}^+ \Delta u_{i-1/2} + a_{i+1/2}^- \Delta u_{i+1/2} \right. \\
&\quad + \frac{1-\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^+ \minmod(1, br_{i+1/2}^-) \Delta u_{i-1/2} - a_{i-1/2}^+ \minmod(r_{i-3/2}^+, b) \Delta u_{i-1/2} \} \\
&\quad + \frac{1+\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^+ \minmod(r_{i+1/2}^-, b) \Delta u_{i-1/2} - a_{i-1/2}^+ \minmod(1, br_{i-3/2}^+) \Delta u_{i-1/2} \} \\
&\quad - \frac{1-\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^- \minmod(r_{i+3/2}^-, b) \Delta u_{i+1/2} - a_{i-1/2}^- \minmod(1, br_{i-1/2}^+) \Delta u_{i+1/2} \} \\
&\quad \left. - \frac{1+\kappa}{4} \{ a_{i+1/2}^- \minmod(1, br_{i+3/2}^-) \Delta u_{i+1/2} - a_{i-1/2}^- \minmod(r_{i-1/2}^+, b) \Delta u_{i+1/2} \} \right]^n
\end{aligned}$$

となる．ただし $r_{j+1/2}^\pm = \Delta u_{j+1/2} / \Delta u_{j+1/2 \pm 1}$ である．この Chakravarthy-Osher スキームの rhs の式を Roe スキームの rhs の式と比較すれば，この rhs の式は Roe スキームの rhs の式の $a_{i\mp 1/2}^\pm$ を次の $\tilde{a}_{i\mp 1/2}^\pm$ で置換えたものであることが分かる．

$$\tilde{a}_{i-1/2}^+ = a_{i-1/2}^+ \left[1 + \frac{1-\kappa}{4} \{ R_a^+ \minmod(1, br_{i+1/2}^-) - \minmod(r_{i-3/2}^+, b) \} \right. \\
\left. + \frac{1+\kappa}{4} \{ R_a^+ \minmod(r_{i+1/2}^-, b) - \minmod(1, br_{i-3/2}^+) \} \right] \quad (16.64a)$$

$$\tilde{a}_{i+1/2}^- = a_{i+1/2}^- \left[1 + \frac{1-\kappa}{4} \{ R_a^- \minmod(1, br_{i-1/2}^+) - \minmod(r_{i+3/2}^-, b) \} \right. \\
\left. + \frac{1+\kappa}{4} \{ R_a^- \minmod(r_{i-1/2}^+, b) - \minmod(1, br_{i+3/2}^-) \} \right] \quad (16.64b)$$

ただし $R_a^+ = a_{i+1/2}^+ / a_{i-1/2}^+$ ， $R_a^- = a_{i-1/2}^- / a_{i+1/2}^-$ である． lhs についても全く同じことが言える．したがって Chakravarthy-Osher TVD スキームは，式 (16.57) と同形の 3 条件

$$\tilde{a}^+ \geq 0, \quad \tilde{a}^- \leq 0, \quad (1-\theta)\lambda |\tilde{a}| \leq 1 \quad (16.65)$$

のもとで TVD 安定になる．

式 (16.65) の第 1 式と第 2 式は，式 (16.64) の [] の中が正のときに満足される．これが常に正であるためには第 1 式は $r_{i+1/2}^- = 0$ ， $r_{i-3/2}^+ \geq b$ のとき，また第 2 式は $r_{i-1/2}^+ = 0$ ， $r_{i+3/2}^- \geq b$ のとき最も厳しい状態になり，このとき [] の中は $1 - \{(1-\kappa)/4\}b - \{(1+\kappa)/4\}$ となる．これが正であるための条件は

$$1 \leq b \leq (3-\kappa)/(1-\kappa) \quad (16.66)$$

となる．式 (16.66) の条件は \minmod 関数の b の大きさを制限するものである．一般に制限関数が働けば解の精度は低下するが， b の値を大きく取れば制限関数の働く領域は狭くなる．

他方式 (16.65) の第 3 式は, $|\tilde{a}|$ が大きいときに厳しくなる. その最大値は式 (16.64) の $r_{i-3/2}^+ = 0$, $r_{i+1/2}^- \geq b$, 最小値は $r_{i+3/2}^- = 0$, $r_{i-1/2}^+ \geq b$ のときで,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{i-1/2}^+ &\leq a_{i-1/2}^+ + a_{i+1/2}^+ \{1 - \kappa + (1 + \kappa)b\} / 4, \\ \tilde{a}_{i+1/2}^- &\geq a_{i+1/2}^- + a_{i-1/2}^- \{1 - \kappa + (1 + \kappa)b\} / 4\end{aligned}$$

となる. これより式 (16.65) の第 3 式が成立するための条件は

$$(1 - \theta)b_1 \lambda |a| \leq 1, \quad b_1 = 1 + \frac{R_a}{4} \{1 - \kappa + (1 + \kappa)b\} \quad (16.67)$$

となる. 式 (16.67) の条件はクーラン数 $C = |a|\Delta t/\Delta x$ または時間間隔 Δt の大きさを制限するものである. ところで R_a の大きさは, 特に a の符号の変わる音速点や衝撃波のところで, どのように見ればよいのであろうか. 音速点のところ ($x_{i-1/2} < x^* < x_{i+1/2}$, x^* は音速点) では, $a_{i-1/2} = a_{i+1/2}^-$, $a_{i+1/2} = a_{i-1/2}^+$ で, 上記の不等式は $\tilde{a}_{i-1/2}^+ \leq a_{i+1/2}^+ \{1 - \kappa + (1 + \kappa)b\} / 4$, $\tilde{a}_{i+1/2}^- \geq a_{i-1/2}^- \{1 - \kappa + (1 + \kappa)b\} / 4$ となる. 音速点とその近傍では R_a は大きくなるがそもそも $|a|$ が小さく, Δt を決める際には対象外のところである. 一方衝撃波のところでは, $a_{i-1/2} = a_{i-1/2}^+$, $a_{i+1/2} = a_{i+1/2}^-$ で, 上記の不等式は $\tilde{a}_{i-1/2}^+ = a_{i-1/2}^+$, $\tilde{a}_{i+1/2}^- = a_{i+1/2}^-$ となり, 問題の起きる余地はない. 以上の考察より, b_1 の値を決める際には $R_a = 1$ と置き, 実際の計算では時間間隔を多少小さめに取り余裕を持たせるのが良いと思われる. 推奨される 3 次上流差分スキーム ($\kappa = 1/3$) の場合には, $b \leq 4$, $b_1 = 1 + (1 + 2b)/6$ となる. 上限 $b = 4$ に取ることにすれば $b_1 = 2.5$, したがって陽解法では $C \leq 0.4$, Crank-Nicholson 法では $C \leq 0.8$, 完全陰解法では無条件ということになる.

この項の終わりに, 数値流束の式 (16.63) の意味を, 3 次上流差分スキームを例に明確にしよう. この式は $\kappa = 1/3$, $b = 2$ に選べば次のようになる.

$$h_{i+1/2}^{(3)} = \begin{cases} f_i + \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta f_{i-1/2}, 2\Delta f_{i+1/2}) + \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta f_{i+1/2}, 2\Delta f_{i-1/2}) & (a \geq 0) \\ f_{i+1} - \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta f_{i+3/2}, 2\Delta f_{i+1/2}) + \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta f_{i+1/2}, 2\Delta f_{i+3/2}) & (a < 0) \end{cases} \quad (16.68)$$

ここでは $a > 0$ の場合を説明するが, $a < 0$ の場合も対称性により同じことが言える. いま簡単のため $i = 0$, $\Delta f_{1/2}/\Delta f_{-1/2} = r$ と置けば上式は次のようになる.

$$\begin{aligned}h_{1/2}^{(3)} &= f_0 + \left\{ \frac{1}{6} \min\text{mod}(1, 2r) + \frac{1}{3} \min\text{mod}(r, 2) \right\} \Delta f_{-1/2} \\ &= f_0 + \begin{cases} (5/6)\Delta f_{-1/2} & (r > 2) & \text{(第 2 の minmod 関数が働く)} \\ (\Delta f_{-1/2} + 2\Delta f_{1/2})/6 & (1/2 \leq r \leq 2) & \text{(3 次上流差分)} \\ (2/3)\Delta f_{1/2} & (0 \leq r < 1/2) & \text{(第 1 の minmod 関数が働く)} \\ 0 & (r < 0) & \text{(1 次上流差分: 第 1, 2 の minmod 関数が働く)} \end{cases}\end{aligned}$$

更にこの式の理解のために図を描けば, $\Delta f > 0$ の場合には図 16.9 のようになる. この図は, 勾配 $\Delta f_{-1/2}$ を固定し, 勾配 $\Delta f_{1/2}$ すなわち r を変化させたときに, 数値流束 $h_{1/2}$ がどのように変化するかを示したものである. $h_{1/2}$ は, 2 つの勾配が等しいときにはもちろんその線上に乗り, $1/2 \leq r \leq 2$ の範囲では f_{-2} を含めた 4 点を通る 3 次上流差分式の数値流束になる. また $h_{1/2}$ は, $r > 2$ では第 2 の minimod が働き $r = 2$ のものと同じになり, 他方 $0 \leq r < 1/2$ では第 1 の minimod が働き上式のように制限される. なお後者の制限をしないときには, $r < 1/4$ の範囲で $h_{1/2}$ が極値になり TVD 条件が満足されなくなる. $h_{1/2}$ は $r < 0$ では 1 次上流差分のものになる.

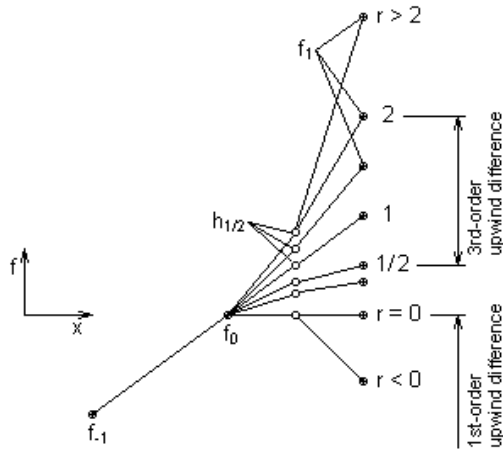


図 16.9: 3次上流差分 TVD スキームの数値流束

16.4.4 1次元 Euler 方程式の流束差分分離法

1次元オイラー方程式 (16.11) に対しては, Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームの数値流束 (16.63) は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 H_{i+1/2} &= H_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1-\kappa}{4} \Delta \tilde{F}_{i-1/2}^+ + \frac{1+\kappa}{4} \Delta \tilde{F}_{i+1/2}^+ - \frac{1-\kappa}{4} \Delta \tilde{F}_{i+3/2}^- - \frac{1+\kappa}{4} \Delta \tilde{F}_{i+1/2}^- & (16.69) \\
 \Delta \tilde{F}_{j+1/2}^\pm &= \text{minmod}(\Delta F_{j+1/2}^\pm, b \Delta F_{j-1/2}^\pm), & (j = i, i+1) \\
 \Delta \tilde{F}_{j+1/2}^\pm &= \text{minmod}(\Delta F_{j+1/2}^\pm, b \Delta F_{j+3/2}^\pm), & (j = i-1, i) \\
 H_{i+1/2}^{Roe} &= \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} |\Delta F_{i+1/2}|
 \end{aligned}$$

ここでは音速点や衝撃波のところで差分式が破綻しないように, $\Delta F_{j+1/2}^\pm = A_{i+1/2}^\pm \Delta q_{j+1/2}$ ($j = i, i \pm 1$) と置くことにする. オイラー方程式を線形化したものは準線形で A はその係数に当たるので, このような A の取り扱い精度にほとんど影響しないが, $\Delta F_{j+1/2}^\pm = R_{j+1/2} |\text{sign} \Lambda_{i+1/2}^\pm| (\Lambda \Delta q)_{j+1/2}$ のように置けば精度に全く影響しないことになる.

以下では, 流束の差分 $\Delta F^\pm = A^\pm \Delta q$ の流束差分分離法 (flux difference splitting) における計算式を導出する. 簡単のため添字を $\Delta F_j^\pm = (N^{-1} R^* \Lambda^\pm L^* N)_l \Delta q_j$, $l = i+1/2, j = l, l \pm 1$ のように付けることにする. まず $N_l \Delta q_j$ を計算すれば,

$$\begin{aligned}
 N_l \Delta q_j &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}u & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \rho u \\ \Delta e \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \Delta \rho_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j \\ \Delta P_j \end{pmatrix} \\
 \Delta M_j &\equiv -u_l \Delta \rho_j + \Delta \rho u_j, \quad \Delta P_j \equiv \phi_l^2 \Delta \rho_j - \tilde{\gamma} u_l \Delta \rho u_j + \tilde{\gamma} \Delta e_j
 \end{aligned}$$

ただし $\phi^2 \equiv \tilde{\gamma} u^2/2$ である. 次に $L_l \Delta q_j$ を計算すれば,

$$L_l \Delta q_j = (L^* N)_l \Delta q_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} \Delta \rho_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j \\ \Delta P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \rho_j - \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j + \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j - \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j \end{pmatrix}$$

更に $(R^* \Lambda^\pm L)_l \Delta q_j$ を計算すれば,

$$\begin{aligned} (R^* \Lambda^\pm L)_l \Delta q_j &= \begin{pmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} \Delta \rho_j - \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j + \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j \\ \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j - \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{1l}^\pm \Delta \rho_j + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \\ \lambda_{1l}^\pm \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j \\ \lambda_{1l}^\pm \Delta P_j + \lambda_{al}^\pm c_l \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \Delta P_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u+c$, $\lambda_3 = u-c$, $\lambda_i^\pm = (\lambda_i \pm |\lambda_i|)/2$, $\lambda_a^\pm = (\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm)/2$, $\lambda_b^\pm = (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)/2 - \lambda_1^\pm$ である. 最後に $\Delta F_j^\pm = (R \Lambda^\pm L)_l \Delta q_j$ を計算すれば²⁸,

$$\begin{aligned} \Delta F_j^\pm &= (N^{-1} R^* \Lambda^\pm L)_l \Delta q_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix}_l \begin{pmatrix} \lambda_{1l}^\pm \Delta \rho_j + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \\ \lambda_{1l}^\pm \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{\rho_l c_l} \Delta P_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{\rho_l} \Delta M_j \\ \lambda_{1l}^\pm \Delta P_j + \lambda_{al}^\pm c_l \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \Delta P_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{1l}^\pm \Delta \rho_j & + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \\ \lambda_{1l}^\pm \Delta(\rho u)_j + \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta P_j + \lambda_{bl}^\pm \Delta M_j + \lambda_{al}^\pm \frac{u_l}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{u_l}{c_l^2} \Delta P_j \\ \lambda_{1l}^\pm \Delta e_j + \lambda_{al}^\pm \frac{u_l}{c_l} \Delta P_j + \lambda_{bl}^\pm u_l \Delta M_j + \lambda_{al}^\pm \frac{H_l}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{H_l}{c_l^2} \Delta P_j \end{pmatrix} \quad (16.70a) \end{aligned}$$

上式を整理すれば, 次の分離された流束差分 ΔF_j^\pm の式が得られる.

$$\Delta F_j^\pm = \lambda_{1l}^\pm \Delta q_j + \left\{ \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta P_j + \lambda_{bl}^\pm \Delta M_j \right\} q_{al} + \left\{ \lambda_{al}^\pm \frac{1}{c_l} \Delta M_j + \lambda_{bl}^\pm \frac{1}{c_l^2} \Delta P_j \right\} q_{bl} \quad (16.70b)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad q_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \quad q_b = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix},$$

$$\lambda_a^\pm = (\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm)/2, \quad \lambda_b^\pm = (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)/2 - \lambda_1^\pm,$$

$$\Delta M_j = \begin{pmatrix} -u & 1 & 0 \end{pmatrix}_l \Delta q_j, \quad \Delta P_j = \begin{pmatrix} \phi^2 & -\tilde{\gamma}u & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_l \Delta q_j,$$

$$\phi^2 = \tilde{\gamma} \frac{1}{2} u^2$$

なお ΔM と ΔP はそれぞれ運動量の差分 $\Delta m = \Delta(\rho u)$ または静圧の差分 Δp に近いものである.

次に分離された流束差分を $\Delta F_j^\pm = R_j |\text{sign} \Lambda_l^\pm| (\Lambda L \Delta q)_j$ と置いた場合の流束差分の式を導出する. 以下では混乱は生じないと思われるので, $|\text{sign} \Lambda_l^\pm| \Lambda_j$ の成分 $|\text{sign} \lambda_{kl}^\pm| \lambda_{kj} = \tilde{\lambda}_{klj}^\pm$ を単に λ_k^\pm または λ_{kj}^\pm と書く

²⁸ $H = c^2/\tilde{\gamma} + u^2/2 = (e+p)/\rho$

ことにする．始めに $N_j \Delta q_j$ を計算すれば²⁹，

$$N_j \Delta q_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}u & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta \rho u \\ \Delta e \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta u \\ \Delta p \end{pmatrix}_j = \Delta q_j^*$$

また $A_j^{*\pm} = R_j^* |\text{sign} \Lambda_l^\pm| \Lambda_j L_j^*$ は式 (16.17)(16.18) から次のように求められる．

$$A^{*\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & \frac{\rho}{c} \lambda_a^\pm & \frac{1}{c^2} \lambda_b^\pm \\ 0 & \lambda_1^\pm + \lambda_b^\pm & \frac{1}{\rho c} \lambda_a^\pm \\ 0 & \rho c \lambda_a^\pm & \lambda_1^\pm + \lambda_b^\pm \end{pmatrix} \quad (16.71)$$

ただし $\lambda_a^\pm, \lambda_b^\pm$ は上記と同様に定義されたものである．これより分離流束差分 $\Delta F_j^\pm = N_j^{-1} A_j^{*\pm} \Delta q_j^*$ は式 (16.16) を用い次のように求められる³⁰．

$$\Delta F_j^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm \Delta \rho & + \frac{\rho}{c} \lambda_a^\pm \Delta u & + \frac{1}{c^2} \lambda_b^\pm \Delta p \\ u \lambda_1^\pm \Delta \rho & + \rho (\lambda_1^\pm + M \lambda_a^\pm + \lambda_b^\pm) \Delta u & + \frac{1}{c} (\lambda_a^\pm + M \lambda_b^\pm) \Delta p \\ \frac{u^2}{2} \lambda_1^\pm \Delta \rho + \rho c (\lambda_1^\pm + \frac{H}{c^2} \lambda_a^\pm + M \lambda_b^\pm) \Delta u & + (\frac{1}{\tilde{\gamma}} \lambda_1^\pm + M \lambda_a^\pm + \frac{H}{c^2} \lambda_b^\pm) \Delta p \end{pmatrix}_j \quad (16.72a)$$

この式は次のように表すこともできる．

$$\Delta F_j^\pm = \lambda_{1j}^\pm \Delta q_1 + (\lambda_a^\pm \frac{1}{c_j} \Delta p_j + \lambda_b^\pm \rho_j \Delta u_j) q_{aj} + (\lambda_a^\pm \frac{\rho_j}{c_j} \Delta u_j + \lambda_b^\pm \frac{1}{c_j^2} \Delta p_j) q_{bj} \quad (16.72b)$$

$$\Delta q_1 = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ u \Delta \rho + \rho \Delta u \\ \frac{u^2}{2} \Delta \rho + \rho c \Delta u + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \Delta p \end{pmatrix}, \quad q_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ cM \end{pmatrix}, \quad q_b = \begin{pmatrix} 1 \\ cM \\ H \end{pmatrix},$$

$$\lambda_k^\pm = |\text{sign} \lambda_{kl}^\pm| \lambda_{kj}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_a^\pm = (\lambda_2^\pm - \lambda_3^\pm)/2, \quad \lambda_b^\pm = (\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)/2 - \lambda_1^\pm$$

右辺の高次スキームでは，数値流束 $H_{i+1/2}$ の値は一種の補間式から求められるので，上流化は点 $x_{i+1/2}$ における特性速度 $\lambda_{i+1/2}$ の符号によって行うのが妥当といえる．つまり式 (16.70) と (16.72) は $l = i+1/2, j = i-1/2, i+1/2, i+3/2$ と置いて使われるものである．

²⁹ $j = i+1/2$ のときに $f_{i+1/2} = (f_i + f_{i+1})/2, \Delta f_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i$ と置いて計算すれば

$$\text{第 2 要素} = \frac{1}{\rho_i + \rho_{i+1}} [-(u_i + u_{i+1})(\rho_{i+1} - \rho_i) + 2((\rho u)_{i+1} - (\rho u)_i)]$$

$$= \frac{1}{\rho_i + \rho_{i+1}} [(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_i + \rho_i u_{i+1} - \rho_{i+1} u_i] = u_{i+1} - u_i = \Delta u_{i+1/2}$$

$$\text{第 3 要素} = \frac{\tilde{\gamma}}{4} (u_i^2 + u_{i+1}^2)(\rho_{i+1} - \rho_i) - \frac{\tilde{\gamma}}{2} (u_i + u_{i+1}) [(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_i] + p_{i+1} - p_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} [(\rho u^2)_{i+1} - (\rho u^2)_i]$$

$$= p_{i+1} - p_i + \frac{\tilde{\gamma}}{4} (u_{i+1} - u_i)^2 (\rho_{i+1} - \rho_i) = \Delta p_{i+1/2} + \tilde{\gamma} \left(\frac{\Delta u_{i+1/2}}{2} \right)^2 \Delta \rho_{i+1/2}$$

第 3 要素の式の第 2 項は第 1 項に比べ 2 次の微量であるから無視する．

³⁰ $\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\tilde{\gamma}} = \frac{H}{c^2}$

次に△形陰解法の式 (16.35) または (16.37) の左辺の計算について述べる．1次上流差分を用いることにすれば左辺は次のようになる．

$$lhs = -\theta\lambda_i^+ \Delta q_{i-1} + (I + \theta\lambda|A_i|)\Delta q_i + \theta\lambda_i^- \Delta q_{i+1} \quad (16.73)$$

ただし $\lambda = \Delta t/\Delta x$, I は単位行列, $|A| = A^+ - A^-$ である．この左辺の計算では, 点 x_i における特性速度 λ_{ki} , $k = 1, 2, 3$ の符号によって上流化を行うのが妥当と考えられる．保存形 Euler 方程式の分離されたヤコビ行列 $A^\pm = N^{-1}A^{*\pm}N$ を式 (16.71) の $A^{*\pm}$ を基に式 (16.16) を用いて計算すれば次のようになる．

$$A^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm - \frac{u}{c}\lambda_a^\pm + q\lambda_b^\pm & \frac{1}{c}\lambda_a^\pm - \frac{\tilde{\gamma}u}{c^2}\lambda_b^\pm & \frac{\tilde{\gamma}}{c^2}\lambda_b^\pm \\ \frac{\gamma-3}{2}\frac{u^2}{c}\lambda_a^\pm + (q-1)u\lambda_b^\pm & \lambda_1^\pm - (\gamma-2)\frac{u}{c}\lambda_a^\pm - (2q-1)\lambda_b^\pm & \frac{\tilde{\gamma}}{c}\lambda_a^\pm + \frac{\tilde{\gamma}u}{c^2}\lambda_b^\pm \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}\frac{u^3}{c} - \frac{cu}{\tilde{\gamma}}\right)\lambda_a^\pm + (q-1)\frac{u^2}{2}\lambda_b^\pm & \left\{\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\frac{u^2}{c} + \frac{c}{\tilde{\gamma}}\right\}\lambda_a^\pm - qu\lambda_b^\pm & \lambda_1^\pm + \frac{\tilde{\gamma}u}{c}\lambda_a^\pm + (q+1)\lambda_b^\pm \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm - M\lambda_a^\pm + q\lambda_b^\pm & \frac{1}{c}(\lambda_a^\pm - \tilde{\gamma}M\lambda_b^\pm) & \frac{1}{c^2}\tilde{\gamma}\lambda_b^\pm \\ c\left[(q-M^2)\lambda_a^\pm + (q-1)M\lambda_b^\pm\right] & \lambda_1^\pm - (\gamma-2)M\lambda_a^\pm - (2q-1)\lambda_b^\pm & \frac{\tilde{\gamma}}{c}(\lambda_a^\pm + M\lambda_b^\pm) \\ c^2M\left[\left(q - \frac{H}{c^2}\right)\lambda_a^\pm + (q-1)\frac{M}{2}\lambda_b^\pm\right] & c\left[\left(\frac{H}{c^2} - 2q\right)\lambda_a^\pm - qM\lambda_b^\pm\right] & \lambda_1^\pm + \tilde{\gamma}M\lambda_a^\pm + (q+1)\lambda_b^\pm \end{pmatrix} \quad (16.74)$$

ただし $M = u/c$ はマッハ数, $q = \phi^2/c^2 = \tilde{\gamma}M^2/2$, また $H/c^2 = (1+q)/\tilde{\gamma}$ である．式 (16.74) の下式は無次元量を多く用いた式で, 式 (16.29)–(16.31) から導くこともできる．

流束差分分離法に関して以上述べてきたところを要約すれば次のようになる．

1次元 Euler 方程式の初期値問題の差分方程式は, 前節に示した△形陰解法の式, すなわち定常流の場合には式 (16.35), 非定常流の場合には式 (16.37) で, これらの式は予測子修正子法によって解かれる．これらの式の右辺の流束の微分 F_x はまず保存形

$$(F_x)_i = \frac{1}{\Delta x}(H_{i+1/2} - H_{i-1/2})$$

で表され, 数値流束 $H_{i+1/2}$ は Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームを適用し式 (16.69) のように置かれる．この式の流束差分の値は, 音速点で振れが生じないように対策の施された流束差分分離法の式 (16.70) または (16.72) から求められる．

他方△形陰解法の式の左辺は, 1次上流差分を適用し式 (16.73) のように置かれ, この式の流束分離されたヤコビ行列 A_i^\pm の値は式 (16.74) から求められる．

なお式 (16.69) の b は式 (16.66) を満足するように, またクーラン数 C または時間間隔 Δt は式 (16.67) を満足するように与えなければならない．

1次元オイラー方程式の初期値問題がどのように解かれるのかについては 16.6 節の数値計算例を参照されたい．ここでは△形陰解法の他に Runge-Kutta 法などの陽解法も用いている．

16.5 1次元流れのゴドゥノフ型スキーム

ここでは最初にゴドゥノフ法 (Godunov scheme) そのものを説明する。この解法は一種の有限体積法 (finite volume method) で、初期値は各要素内で一定の区分的定数値関数で近似的に与えられる。このとき変数は要素境界で不連続になり、その初期値問題は多くのリーマン問題 (Riemann's problem)³¹ を解くことに帰着される。ゴドゥノフ法は今日まで多くの改良がなされきた。リーマン問題は数値的に解くことができるが容易でない。ここでは、これを近似的に解く近似リーマン解の中から Roe の近似リーマン解を紹介する。ゴドゥノフ法の精度は1次相当で、区分的定数値関数を区分的多項式にすれば精度を改善できる。有限体積法では、要素の中心にその点の変数値ではなく、変数のその要素にわたる平均値が与えられ、この平均値をもとに各要素ごとに変数が区分的多項式で近似される。このとき要素境界の変数の不連続は小さくなるが依然として存在し、ここに近似リーマン解が補われる。

16.5.1 1次元流れのゴドゥノフ法

ゴドゥノフ法³² はオイラー方程式 (16.11) の初期値問題の数値解法である。初期値 $q^n(x)$ は各要素内で一定の区分的定数値関数で近似的に与えられる。次にこの初期値に対しオイラー方程式の初期値問題が厳密に解かれる。初期値はセル境界で一般に跳躍 (jump) するから、各境界でリーマン問題を解くことになる。リーマン問題は断面積一定の衝撃波管の流れで、その物理現象は、高圧気体と低圧気体を仕切る隔膜が瞬時に破壊されたときに、低圧気体内に衝撃波が走り高圧気体内に膨張波が広がるものである。リーマン問題は xt 空間内の初期曲線 $t = 0$ 上の初期値 $q(x, 0) = q_0 (x < 0)$, $= q_1 (x \geq 0)$ の点 $x = 0$ から起きる膨張扇 (expansion fan), 境界面 (interface), 衝撃波 (shock) を決定する問題である。図 16.10 は、 xt 面における有限体積法のセルおよびその境界におけるリーマン問題の解を示したものである。セル ABCD において、その大部分を占める点 A から出る衝撃波と点 B から出る膨張波 (図では膨張扇を1つの膨張波で近似的に表示) で囲まれた領域では $q = q_i^n$ で、また膨張波と境界面の間、境界面と衝撃波の間でも q の値は一定になりセル境界上の流束 F も一定値 $F_{i-1/2}$ または $F_{i+1/2}$ になる。式 (16.11) を1つのセルにわたって積分すれば、次式が得られる。

$$q_i^{n+1} \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q^{n+1}(x) dx = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \tag{16.75}$$

時間 t^{n+1} における $q^{n+1}(x)$ の平均値 q_i^{n+1} は、平均を取らなくてもこの式から容易に求めることができる。この操作をすべてのセルにわたって行えば、解 $q(x, t)$ を Δt だけ先へ延長することができる。

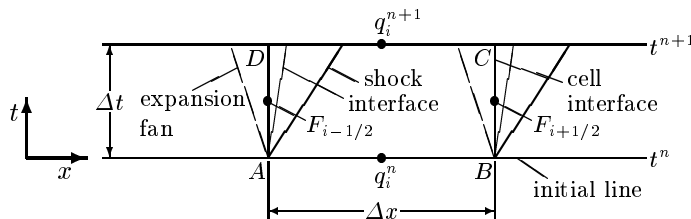


図 16.10: Godunov 法

³¹ リーマン衝撃波管流れ問題 (Riemann shock tube flow problem) . 偉大な数学者 Riemann, G.F.B. 自身は2階双曲型方程式の Cauchy 問題の積分表示を与えている。

³² Godunov, S. K., Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Matematicheskii Sbornik*, 47(1959), 271-306. この文献に代わるものとして, Holt, M., Numerical Methods in Fluid Dynamics, 2nd ed., 28-66, 1984, Springer-Verlag Berlin.

ゴドゥノフ法は、安定に解を求めるものであるが、リーマン問題を解くことは必ずしも容易でなく、また1次精度で不連続を鮮明に捕獲することができない。Godunov 自身はその後第2ゴドゥノフ法を提案している。この解法についても前出の Holt 監修のソ連で開発された数値スキームを紹介した本の中に詳しい説明がある。しかしながら後の CFD に大きな影響を及ぼしたものはもとのゴドゥノフ法である。その後米国の研究者によってリーマン問題の近似解法が開発され、また精度を改善するために区分的定数値関数から区分的多項式への拡張が行われている。

16.5.2 Roeの近似 Riemann 解

今不連続の左側の量を添字 L 、右側の量を添字 R を付けて表すことにする。ヤコビ行列 A が次の条件を満足するように決定できれば、スキームは保存形になる。

$$\delta F = \bar{A} \delta q, \quad F_R - F_L = \bar{A}(q_R - q_L) \quad (16.76)$$

ただし \bar{A} は q_L と q_R の関数で、 $q_L = q_R = q$ ならば $\bar{A}(q, q) = A(q) = \partial F / \partial q$ 、また \bar{A} は実固有値と1次独立の固有ベクトルを持つものとする。Roe はこれらの3条件を満足する \bar{A} を巧妙な手段で見出している³³。未知変数ベクトル q と流束ベクトル F は

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix} \quad (16.77)$$

で定義されるベクトル z の成分の2次式で表すことができる。すなわち

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{z_1 z_3}{\gamma} + \frac{\tilde{\gamma} z_2^2}{2\gamma} \end{pmatrix}, \quad (16.78a)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ \frac{\tilde{\gamma} z_1 z_3}{\gamma} + \frac{(\gamma+1) z_2^2}{2\gamma} \\ z_2 z_3 \end{pmatrix} \quad (16.78b)$$

q と F の中の2次式 $z_1^2, z_1 z_2, \dots$ の差分は、 $\delta(ab) = (ab)_R - (ab)_L = \bar{a} \delta b + \bar{b} \delta a$ のように書き換えることができる。ただし $\delta u = u_R - u_L$ 、 $\bar{u} = (u_L + u_R)/2$ である。 $\delta q, \delta F$ に対しこの書換えを実行し整理すれば次式が得られる。

$$\delta q = \bar{B} \delta z, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \\ \bar{z}_3/\gamma & \tilde{\gamma}\bar{z}_2/\gamma & \bar{z}_1/\gamma \end{pmatrix} \quad (16.79a)$$

$$\delta F = \bar{C} \delta z, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 \\ \tilde{\gamma}\bar{z}_3 & (\gamma+1)\bar{z}_2 & \tilde{\gamma}\bar{z}_1 \\ \gamma & \gamma & \gamma \\ 0 & \bar{z}_3 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad (16.79b)$$

³³Roe, P. L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, **43**(1981), 357-72.

これより $\delta F = \bar{C} \delta z = \bar{C} \bar{B}^{-1} \delta q$, 式 (16.76) を満足する \bar{A} は次のように求められる³⁴

$$\begin{aligned} \bar{A} = \bar{C} \bar{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \frac{\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} & (3-\gamma) \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & \tilde{\gamma} \\ -\frac{\bar{z}_2 \bar{z}_3}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma} \bar{z}_2^3}{2 \bar{z}_1^3} & \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2^2}{\bar{z}_1^2} & \gamma \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \bar{u}^2 & (3-\gamma) \bar{u} & \gamma-1 \\ -\bar{H} \bar{u} + \frac{\gamma-1}{2} \bar{u}^3 & \bar{H} - (\gamma-1) \bar{u}^2 & \gamma \bar{u} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.80)$$

ただし \bar{u} , \bar{H} は次のように定義された u または H の平均値である .

$$\bar{u} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \bar{H} = \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

式 (16.80) の \bar{A} は Roe の第 1 条件, 式 (16.76) を満足するように導いたものであり, \bar{u} , \bar{H} の定義式は第 2 条件, $q_L = q_R = q$ のとき $\bar{A}(q, q) = A(q)$, を明らかに満足するものである . また第 3 の条件も式 (16.80) が保存形方程式のヤコビ行列の式 (16.12b) と同形であるから, 3 個の異なる実固有値と固有ベクトルを持つことになる . \bar{A} の固有値 $\bar{\lambda}_i$ は, $|\bar{A} - \bar{\lambda} I| = 0$ すなわち

$$\begin{vmatrix} -\bar{\lambda} & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \bar{u}^2 & (3-\gamma) \bar{u} - \bar{\lambda} & \tilde{\gamma} \\ -\bar{H} \bar{u} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{u}^3 & \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{u}^2 & \gamma \bar{u} - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = -(\bar{\lambda} - \bar{u})(\bar{\lambda} - \bar{u} - \bar{c})(\bar{\lambda} - \bar{u} + \bar{c}) = 0$$

から計算できる³⁵. ただし \bar{c} は次式で定義される平均音速である .

$$\bar{c}^2 = (\gamma-1) \left(\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right)$$

これより固有値 $\bar{\lambda}_i$ は次のように求められる .

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{u}, \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{u} + \bar{c}, \quad \bar{\lambda}_3 = \bar{u} - \bar{c} \quad (16.81)$$

³⁴ \bar{B} の逆行列は Gauss-Jordan 法によって容易に求めることができる .

$$\bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\bar{z}_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{z}_2}{2\bar{z}_1^2} & \frac{1}{\bar{z}_1} & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma} \bar{z}_2^2}{2 \bar{z}_1^3} - \frac{\bar{z}_3}{2\bar{z}_1^2} & -\tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1^2} & \frac{\gamma}{\bar{z}_1} \end{pmatrix}$$

³⁵ 第 1 列に第 2 列を \bar{u} 倍したものを加え, それから積の和を作れば次のようになる .

$$\begin{vmatrix} -\bar{\lambda} + \bar{u} & 1 & 0 \\ \frac{3-\gamma}{2} \bar{u}^2 - \bar{\lambda} \bar{u} & (3-\gamma) \bar{u} - \bar{\lambda} & \tilde{\gamma} \\ -\frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{u}^3 & \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{u}^2 & \gamma \bar{u} - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = -(\bar{\lambda} - \bar{u}) (\bar{\lambda}^2 - 2\bar{u} \bar{\lambda} - \tilde{\gamma} \bar{H} + \frac{\gamma+1}{2} \bar{u}^2)$$

また \bar{A} の右固有ベクトル \bar{r}^i は, $(\bar{A} - \bar{\lambda}_i I) \bar{r}^i = 0$ すなわち

$$\begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_i & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}\bar{u}^2 & (3-\gamma)\bar{u} - \bar{\lambda}_i & \tilde{\gamma} \\ -\bar{H}\bar{u} + \frac{\tilde{\gamma}}{2}\bar{u}^3 & \bar{H} - \tilde{\gamma}\bar{u}^2 & \gamma\bar{u} - \bar{\lambda}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^i \\ \bar{r}_2^i \\ \bar{r}_3^i \end{pmatrix} = 0$$

から計算できる. いま $\bar{r}_1^i = 1$ とすれば右固有ベクトルは

$$\bar{r}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \frac{\bar{u}^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \bar{r}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} + \bar{c} \\ \bar{H} + \bar{c}\bar{u} \end{pmatrix}, \quad \bar{r}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u} - \bar{c} \\ \bar{H} - \bar{c}\bar{u} \end{pmatrix}$$

となる. これより \bar{A} は確かに 3 個の実固有値と 3 個の 1 次独立の実固有ベクトルを持つことが分かる.

保存形 Euler 方程式を非保存形にする行列 \bar{N} とその逆行列 \bar{N}^{-1} は式 (16.16) から一応次のように表すことができる.

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 \\ \tilde{\gamma}\bar{u}^2/2 & -\tilde{\gamma}\bar{u} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ \bar{u}^2/2 & \bar{\rho}\bar{u} & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (16.82)$$

しかしこの \bar{N} を実際の計算に利用するには

$$\bar{N} \delta q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 \\ \tilde{\gamma}\bar{u}^2/2 & -\tilde{\gamma}\bar{u} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta(\rho u) \\ \delta e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta p \end{pmatrix} = \delta q^* \quad (16.83)$$

すなわち 2 つの式

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{1}{\bar{\rho}}(-\bar{u}\delta\rho + \delta(\rho u)), \\ \delta p &= \tilde{\gamma}\delta e - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\delta(\rho u^2) = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\bar{u}^2\delta\rho - \tilde{\gamma}\bar{u}\delta(\rho u) + \tilde{\gamma}\delta e \end{aligned}$$

が満足されなければならない. とここでこれらの式の中の $\delta(\rho u)$ と $\delta(\rho u^2)$ は次のように書き換えることができる.

$$\begin{aligned} \delta(\rho u) &= (\rho u)_R - (\rho u)_L = \{(\sqrt{\rho u})_R + (\sqrt{\rho u})_L\}(\sqrt{\rho_R} - \sqrt{\rho_L}) + \sqrt{\rho_L\rho_R}(u_R - u_L) \\ &= \bar{u}\delta\rho + \sqrt{\rho_L\rho_R}\delta u \\ \delta(\rho u^2) &= (\rho u^2)_R - (\rho u^2)_L = \{(\sqrt{\rho u})_R + (\sqrt{\rho u})_L\}\{(\sqrt{\rho u})_R - (\sqrt{\rho u})_L\} \\ &= \bar{u}(\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L})\{(\sqrt{\rho u})_R - (\sqrt{\rho u})_L\} \\ &= \bar{u}\delta(\rho u) + \sqrt{\rho_R\rho_L}\bar{u}\delta u \end{aligned}$$

上の 2 つの式のうち上式は $\delta(\rho u) = \bar{u}\delta\rho + \bar{\rho}\delta u$ すなわち密度の平均値 $\bar{\rho}$ を

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L\rho_R}$$

のように定義すれば成立する. また下式もこの $\bar{\rho}$ の定義のもとで成立する.

次に非保存形 Euler 方程式の係数行列 $\bar{A}^* = \bar{N}\bar{A}\bar{N}^{-1}$ を計算する .

$$\bar{A}^* = \bar{N}\bar{A}\bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho}\bar{c}^2 & \bar{u} \end{pmatrix} \quad (16.84)$$

この \bar{A}^* は形式的に式 (16.14b) の A^* と同形で , したがって固有ベクトルの行列 \bar{L}, \bar{R} は式 (16.18) を参考に次のように置くことができる .

$$\bar{L}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\bar{c}^2 \\ 0 & 1 & 1/\bar{\rho}\bar{c} \\ 0 & 1 & -1/\bar{\rho}\bar{c} \end{pmatrix}, \quad \bar{R}^* = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\rho}/2\bar{c} & -\bar{\rho}/2\bar{c} \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \bar{\rho}\bar{c}/2 & -\bar{\rho}\bar{c}/2 \end{pmatrix} \quad (16.85)$$

実際の計算に必要な $\bar{\Lambda}, \delta\bar{W}, \bar{R}$ はまとめて書けば次のようになる .

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} + \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} - \bar{c} \end{pmatrix}, \quad (16.86)$$

$$\delta\bar{W} = \begin{pmatrix} \partial\bar{w}_1 \\ \partial\bar{w}_2 \\ \partial\bar{w}_3 \end{pmatrix} = \bar{L}^* \delta q^* = \begin{pmatrix} \delta\rho - \delta p/\bar{c}^2 \\ \delta u + \delta p/\bar{\rho}\bar{c} \\ \delta u - \delta p/\bar{\rho}\bar{c} \end{pmatrix}, \quad (16.87)$$

$$\bar{R} = (\bar{r}^1 \quad \bar{r}^2 \quad \bar{r}^3) = \bar{N}^{-1}\bar{R}^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} & -\frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} \\ \bar{u} & \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\bar{u} + \bar{c}) & -\frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\bar{u} - \bar{c}) \\ \frac{\bar{u}^2}{2} & \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\bar{H} + \bar{c}\bar{u}) & -\frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}}(\bar{H} - \bar{c}\bar{u}) \end{pmatrix}, \quad (16.88)$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} = \mathfrak{R} \rho_L, \quad \bar{u} = \frac{u_L + \mathfrak{R} u_R}{1 + \mathfrak{R}}, \quad \bar{H} = \frac{H_L + \mathfrak{R} H_R}{1 + \mathfrak{R}}, \quad (16.89)$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma - 1) \left(\bar{H} - \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right), \quad \mathfrak{R} \equiv \sqrt{\rho_R / \rho_L}$$

なお固有ベクトルの大きさは任意に選ぶことができるので , 式 (16.88) は前記の右固有ベクトルに係数 $\pm \bar{\rho}/2\bar{c}$ を掛けたものになっている .

Roe の近似 Riemann 解は次のいずれかの式によって計算される .

$$F_{i+1/2} = F(q_{i+1/2L}) + \sum_k \bar{\lambda}_k^- \partial\bar{w}_k \bar{r}^k \quad (16.90a)$$

$$= F(q_{i+1/2R}) - \sum_k \bar{\lambda}_k^+ \partial\bar{w}_k \bar{r}^k \quad (16.90b)$$

$$= \frac{1}{2} \{ F(q_{i+1/2L}) + F(q_{i+1/2R}) \} - \frac{1}{2} \sum_k |\bar{\lambda}_k| \partial\bar{w}_k \bar{r}^k \quad (16.90c)$$

これらの式は , Euler 方程式から特性の理論に基づいて導かれたものであるが , 物理的に解釈すれば , 本節始めの図 16.10 のように膨張波 , 流跡線 (境界面) , 圧縮波 (衝撃波) が出ている場合には , 第 1 式は流束 $F_{i+1/2}$ が不連続の左側の流束 $F(q_{i+1/2L})$ に膨張波を横切ったの流束の変化 $\bar{\lambda}_3 \partial\bar{w}_3 \bar{r}^3$ を加えたものになること , 第 2 式は不連続の右側の流束 $F(q_{i+1/2R})$ から圧縮波を横切ったの流束の変化 $\bar{\lambda}_2 \partial\bar{w}_2 \bar{r}^2$ と流跡線を横

切ったの流束の変化 $\bar{\lambda}_1 \partial \bar{w}_1 \bar{r}^1$ を差し引いたものになることを示している。また第3式は第1式と第2式の平均を取り、対称性を持たせたものである。

セル境界の不連続からは、物理変数 ρ, u, H, \dots に対してはもちろん膨張扇、境界面、衝撃波が出るが、Roe 平均値 $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{H}, \dots$ に対しては擬似的膨張波、エントロピー波、圧縮波が出ることになる。Roe 平均値を用いれば、特性の理論により近似的リーマン解を陽的に求めることができる。この近似解の妥当性、精度等については前記注の文献を参照されたい。

16.5.3 ゴドゥノフ法の2次精度への拡張

1次精度のゴドゥノフ法を2次精度に拡張したものはかなりあるが、ここには妥当と思われるいくつかの方法について述べる。ゴドゥノフ法は前述のように区分的定数値関数近似、リーマン解、セル平均から構成されるが、以下ではこれらに相当のものを計画段階、物理段階、セル平均と呼ぶことにする。

まず計画段階 (projection stage) では、初期値が区分的1次式で与えられ、セル境界 (interfaces of cells) の値が変数外挿 (variable extrapolation) によって求められる。MUSCL 法 (MUSCL approach, Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws)³⁶ はその代表的なもので、この方法では初期値が各セルごとに次の区分的1次式で与えられる。

$$q_i^n(x) = q_i^n + \xi \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}^n, \Delta q_{i+1/2}^n) \quad (-1/2 \leq \xi \leq 1/2) \quad (16.91)$$

ただし q_i は点 x_i における変数 $q(x)$ の値というよりは $q(x)$ の i 番目のセルにわたる平均値と見るべきもので、 $\xi = (x - x_i)/\Delta x$, $\Delta q_{i+1/2} = q_{i+1} - q_i$ である。下図にゴドゥノフ法と MUSCL 法の違いを象徴的に示す。MUSCL 法では、 $\min\text{mod}$ 制限関数を用い2つの勾配 $\Delta q_{i-1/2}^n, \Delta q_{i+1/2}^n$ のうち緩勾配の方を選び、セル境界における跳躍量が $q(x)$ の増加する境界で正、減少する境界で負になるようにし、単調性 (monotonicity) を強調している。これに反し、式 (16.91) の $\min\text{mod}$ 関数を Roe の superbee といわれる制限関数

$$\text{superbee}(r, 1) = \max[0, \min(r, 2), \min(2r, 1)]$$

に置換え急勾配の方を選ぶことにすれば、衝撃波などの不連続の捕獲能力を格段に改善することができる。なおこのとき単調性は壊れる。

次に物理段階 (physical stage) について説明する。初期値 $q_i^n(x)$ が1次式で与えられるときには、 $q_i(x, t)$ は初期曲線 $t = t^n$ の近傍つまりセル内外でほぼ1次的に変化し、セル境界の数値流束も時間の関数になる。

³⁶ Van Leer, B., Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method., *J. Comput. Phys.*, **32** (1979), 101-36.

したがってセル境界上の時間平均流束 (time-averaged flux)

$$\hat{F}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F_{i+1/2}(t) dt \quad (16.92)$$

を求めることが必要になる．その方法は下記のようにいろいろある．最後のセル平均では，オイラー方程式を1つのセルにわたって積分した保存関係式 (integral conservation relation)

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}) \quad (16.93)$$

からセル平均値 q_i^{n+1} が求められる．

陽的2段階法では，第1段階で時間平均流束 $\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{n+1/2}$ を計算する．その手順は式 (16.91) から q のセル境界値

$$\begin{aligned} q_{i+1/2L}^n &= q_i^n + \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}^n, \Delta q_{i+1/2}^n), \\ q_{i+1/2R}^n &= q_{i+1}^n - \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta q_{i+1/2}^n, \Delta q_{i+3/2}^n) \end{aligned}$$

を求め，前項の式 (16.86)–(16.90c) から Roe の近似リーマン解 $F_{i+1/2}^n$ を求め，中間段階における q のセル平均値

$$q_i^{n+1/2} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

を求め，同様の手順でセル境界値 $q_{i+1/2L}^{n+1/2}$, $q_{i+1/2R}^{n+1/2}$ ，Roe の近似リーマン解 $F_{i+1/2}^{n+1/2}$ を順に計算する．その第2段階では $\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{n+1/2}$ とし式 (16.93) からセル平均値 q_i^{n+1} が求められる．

Crank-Nicholson 型の時間積分法では，時間平均流束は予測子の計算では $\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1/2}^n$ と置かれ，修正子の計算では

$$\hat{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^n + F_{i+1/2}^{n+1})$$

と置かれる．ただし $F_{i+1/2}^{n+1}$ は次の時間ステップの区分的1次式 $q_i^{n+1}(x)$ に対する近似リーマン解である．

次に Roe の波動分離法による時間平均流束 $\hat{F}_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{n+1/2}$ の計算について説明する．そのために必要な中間点の左右の境界値 $q_{i+1/2L}^{n+1/2}$ と $q_{i+1/2R}^{n+1/2}$ はそれぞれ区分的1次式 $q_i^n(x)$ または $q_{i+1}^n(x)$ を基に次式によって陽的に求められる．

$$q_{i+1/2L}^{n+1/2} = q_{i+1/2L}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A\Delta q)_i^n, \quad q_{i+1/2R}^{n+1/2} = q_{i+1/2R}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (A\Delta q)_{i+1}^n \quad (16.94a)$$

$$(A\Delta q)_i^n = (R\Lambda\Delta w)_i^n = \sum_k (\lambda_k \Delta w_k r^k)_i^n \quad (16.94b)$$

この式の解釈については，本章末尾の付録1 Roe の波動分離法と下図を参照されたい．

2次 Roe スキームは，計画段階で区分的1次式 (16.91) の制限関数 $\min\text{mod}$ を superbee に替え，また物理段階で時間平均流束を Roe の波動分離法と Roe の近似リーマン解によって求め，MUSCL 法を大幅に改良したものである． superbee の導入は不連続の捕獲能力を大幅に改善するものである．なおこれによって区分的1次式の単調性は損なわれるが，セル平均値 q_i は TVD である．波動分離法と近似リーマン解は2次精度の範囲で良好な時間平均流束を与えるもので，上流化と TVD の性質を持つ．次章に示す数値計算例からも2次 Roe スキームが不連続や衝撃波の捕獲に優れていることが分かるであろう．

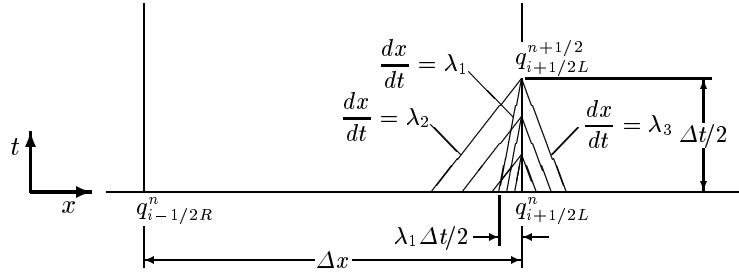


図 16.11: 2次 Roe スキーム

本稿には述べないが MUSCL 法を更に高次に拡張したものに ENO スキーム (essentially non-oscillatory scheme) ³⁷ がある。このスキームでは上述の3つの段階は再構成 (reconstruction), 発展 (evolution), セル平均 (cell averaging) と呼ばれる。ENO の性質は再構成段階で多項式を最も滑らかになるように選ぶことによって実現され, 発展段階では変数の跳躍量が近似リーマン解により考慮される。ENO スキームのキャッチフレーズは, 不連続のところで TVD スキームは1次に落ちるが ENO スキームは高次を保つということである。

16.5.4 有限体積法 TVD スキーム

ここで述べる有限体積法 (finite volume methods) は, 再構成段階で初期値を区分的多項式で近似し精度改善を図るものである³⁸。有限体積法では未知変数ベクトル q_i は, $q(x)$ の i 番目のセルの区間 $[x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}]$ にわたる平均値として定義される。したがって q_i は, 初期値が1次式の場合には $q(x_i)$ になるが, 2次式以上の場合には一般に $q(x_i)$ とは多少異なるものになる。始めに簡単なスカラー輸送方程式 (16.44) に関して述べる。関数 u の真の値を $u(x)$ で定義し, セル中心点 x_i のまわりにテイラー展開すれば,

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x_i) + (x-x_i)u'(x_i) + \frac{1}{2!}(x-x_i)^2 u''(x_i) + \frac{1}{3!}(x-x_i)^3 u'''(x_i) \\ &\quad + \frac{1}{4!}(x-x_i)^4 u^{(4)}(x_i) + \dots \end{aligned} \quad (16.95)$$

この式を x で次々に微分すれば,

$$\begin{aligned} u'(x) &= u'(x_i) + (x-x_i)u''(x_i) + \frac{1}{2!}(x-x_i)^2 u'''(x_i) + \frac{1}{3!}(x-x_i)^3 u^{(4)}(x_i) + \dots, \\ u''(x) &= u''(x_i) + (x-x_i)u'''(x_i) + \frac{1}{2!}(x-x_i)^2 u^{(4)}(x_i) + \dots, \\ u'''(x) &= u'''(x_i) + (x-x_i)u^{(4)}(x_i) + \dots, \\ u^{(4)}(x) &= u^{(4)}(x_i) + \dots \end{aligned}$$

³⁷ ここで ENO スキームに関するいくつかの基本的文献を挙げれば,

Harten, A. and Osher, S., Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes., I., *SIAM J. Numer. Anal.*, **24** (1987), 279-309.

Shu, C. H. and Osher, S., Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II., *J. Comp. Phys.*, **83** (1989), 32-78.

Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarty, S. R., Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III., *J. Comp. Phys.*, **71** (1987), 231-303.

Harten, A., ENO schemes with subcell resolution., *J. Comp. Phys.*, **83** (1989), 148-184.

Yang, H., An artificial compression method for ENO schemes: The slope modification method., *J. Comp. Phys.*, **89** (1990), 125-160.

³⁸ ここで reconstruction を再構成と訳したが, 1986年に始まるベレストロイカに因むものであれば建直しとでも訳すべきか。

関数 $u(x)$ とその導関数 $u'(x)$, $u''(x)$, ... のセルにわたる平均値を求めれば,

$$\begin{aligned} u_i &= u(x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{12} u''(x_i) + \frac{1}{4!} \frac{\Delta x^4}{80} u^{(4)}(x_i), \\ u'_i &= u'(x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{12} u'''(x_i), \\ u''_i &= u''(x_i) + \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{12} u^{(4)}(x_i), \\ u'''_i &= u'''(x_i), \\ u^{(4)}_i &= u^{(4)}(x_i) \end{aligned}$$

これらの式から

$$\begin{aligned} u^{(4)}(x_i) &= u^{(4)}_i, \\ u'''(x_i) &= u'''_i, \\ u''(x_i) &= u''_i - \frac{1}{4!} \Delta x^2 u^{(4)}_i, \\ u'(x_i) &= u'_i - \frac{1}{3!} \frac{\Delta x^2}{4} u'''_i, \\ u(x_i) &= u_i - \frac{1}{2!} \frac{\Delta x^2}{12} u''_i + \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \frac{7}{10} \Delta x^4 u^{(4)}_i \end{aligned}$$

これらを式 (16.95) に代入すれば, 次の関数 $u(x)$ のセル平均値によるテイラー展開が得られる.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_i + (x-x_i)u'_i + \frac{1}{2!} \left\{ (x-x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right\} u''_i + \frac{1}{3!} \left\{ (x-x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{4} \right\} (x-x_i)u'''_i \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left\{ (x-x_i)^4 - \frac{1}{2} (x-x_i)^2 \Delta x^2 + \frac{1}{4!} \frac{7}{10} \Delta x^4 \right\} u^{(4)}_i \end{aligned} \quad (16.96)$$

ここでは式 (16.96) の右辺第 3 項までを取ることにする. それは 2 次式で再構成した 3 次精度の式になるので, その精度を保つように, この式中のセル平均値 u'_i , u''_i を次の中心差分で近似する³⁹.

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{1}{2\Delta x} (-u_{i-1} + u_{i+1}) + O(\Delta x^2) = \frac{1}{2\Delta x} (\Delta u_{i-1/2} + \Delta u_{i+1/2}) + O(\Delta x^2), \\ u''_i &= \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + O(\Delta x^2) = \frac{1}{\Delta x^2} (-\Delta u_{i-1/2} + \Delta u_{i+1/2}) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

これらの差分式を右辺 3 項まで取った式 (16.96) に組み込めば次の区分的 2 次式が得られる.

$$u(x) = u_i + \frac{1}{2} \left(\xi - \xi^2 + \frac{1}{12} \right) \Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{2} \left(\xi + \xi^2 - \frac{1}{12} \right) \Delta u_{i+1/2} + O(\Delta x^3) \quad (-1/2 \leq \xi \leq 1/2)$$

³⁹セル平均値 u'_i の差分式は, 平均を取る前の各点の $u'(x)$ の差分式の平均を取ったものであるから,

$$u'_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u'(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[\frac{1}{2\Delta x} \{-u(x-\Delta x) + u(x+\Delta x)\} + O(\Delta x^2) \right] dx$$

また例えば

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x-\Delta x) dx$$

は $u(x)$ の $x_{i-3/2}$ から $x_{i-1/2}$ までの値の平均値で定義により u_{i-1} になる. 結局この平均では, 平均値を意識せずに差分を取ればよいことになる

ただし $\xi = (x - x_i)/\Delta x$ である．セル境界 $\xi = \pm 1/2$ の $u(x)$ の値は次のようになる．

$$u(x_{i+1/2}) = u_{i+1/2L} = u_i + \frac{1}{6}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta u_{i+1/2} + O(\Delta x^3) \quad (16.97a)$$

$$u(x_{i-1/2}) = u_{i-1/2R} = u_i - \frac{1}{6}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1}{3}\Delta u_{i-1/2} + O(\Delta x^3) \quad (16.97b)$$

添え字 L, R はセル境界の左右の値を意味する．これらの式は 3 次の Chakravathy-Osher スキームの数値流束の式と形式的に同じものである⁴⁰．したがって次のように制限関数を導入することによって TVD 化することができる．

$$u_{i+1/2L} = u_i + \frac{1}{6}\Delta \tilde{u}_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta \tilde{u}_{i+1/2}, \quad (16.98a)$$

$$u_{i+1/2R} = u_{i+1} - \frac{1}{6}\Delta \tilde{u}_{i+3/2} - \frac{1}{3}\Delta \tilde{u}_{i+1/2} \quad (16.98b)$$

$$\Delta \tilde{u}_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta u_{j+1/2}, b\Delta u_{j-1/2}),$$

$$\Delta \tilde{u}_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta u_{j+1/2}, b\Delta u_{j+3/2})$$

また TVD 化のための 2 つの条件，すなわち倍率 b とクーラン数 $C = |a|\Delta t/\Delta x$ の範囲を決める条件式 (16.66) と (16.67) もそのまま使うことができる．

そのセル中心の値は $\min\text{mod}$ 関数が働かないときには

$$u(x_i) = u_i - \frac{1}{24}\Delta^2 u_i \quad (16.99)$$

またセル境界 $x_{i+1/2}$ における変数 u の跳躍量 (jump) は

$$[u]_{i+1/2} = u_{i+1/2R} - u_{i+1/2L} = -\frac{1}{6}\Delta^3 u_{i+1/2} \quad (16.100)$$

となる．もとの関数 $u(x)$ が滑らかに変化するところではこの跳躍量 $[u]_{i+1/2}$ は通常無視できる．

発展段階では，セル境界の流束は上流化された次式から求められる．

$$f_{i+1/2} = (a^+ u_L + a^- u_R)_{i+1/2} \quad (16.101)$$

すなわち波の位相速度 $a \geq 0$ のときにはセル境界の左側の値， $a < 0$ のときには右側の値がとられる．時間積分は前項に述べた解法等によって行われる．

セル平均段階では，セル平均値 u_i^{n+1} が，スカラー輸送方程式 (16.44) を 1 つのセルにわたって積分した次式から求められる．

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}) \quad (16.102)$$

⁴⁰ところで上記の 3 次精度の 2 次式は， $\Delta^2 u_i$ の大きさの項， $\{(\kappa - 1/3)/4\}(\Delta u_{i+1/2} - \Delta u_{i-1/2})$ を加えれば 2 次精度に落ちるが，一般的 2 次 Chakravathy-Osher スキームの流束の式と同形になる．すなわち

$$u_{i+1/2L} = u_i + \frac{1-\kappa}{4}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1+\kappa}{4}\Delta u_{i+1/2} + O(\Delta x^2)$$

$$u_{i-1/2R} = u_i - \frac{1-\kappa}{4}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1+\kappa}{4}\Delta u_{i-1/2} + O(\Delta x^2)$$

またこのとき区分的 2 次式は次のようになる．

$$u(x) = u_i + \frac{1}{2}\left(\xi - \xi^2 + \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2}\right)\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{2}\left(\xi + \xi^2 - \frac{1}{4} + \frac{\kappa}{2}\right)\Delta u_{i+1/2} + O(\Delta x^2) \\ (-1/2 \leq \xi \leq 1/2)$$

次に以上述べたスカラー輸送方程式の2次有限体積法を1次元オイラー方程式のものに拡張する．再構成段階では，区分的2次式のセル境界値が次式によって計算される．

$$q_{i+1/2L} = q_i + \frac{1}{6}\Delta\tilde{q}_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta\tilde{q}_{i+1/2}, \quad (16.103a)$$

$$q_{i+1/2R} = q_{i+1} - \frac{1}{6}\Delta\tilde{q}_{i+3/2} - \frac{1}{3}\Delta\tilde{q}_{i+1/2} \quad (16.103b)$$

$$\Delta\tilde{q}_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta q_{j+1/2}, b\Delta q_{j-1/2}),$$

$$\Delta\tilde{q}_{j+1/2} = \min\text{mod}(\Delta q_{j+1/2}, b\Delta q_{j+3/2})$$

セル境界の跳躍量 $[q]_{i+1/2} = q_{i+1/2R} - q_{i+1/2L}$ は，一般に十分小さく無視できるが，不連続のところや $\min\text{mod}$ 関数の働く場合には小さくなく，計算に考慮しなければならない．なおこの方法による再構成では変数の単調性は保証されない．

発展段階では，流束は跳躍量が無視される場合には次式で計算される．

$$F_{i+1/2} = (A^+q_L + A^-q_R)_{i+1/2} = \sum_k (\lambda_k^+ w_{kL} r^k + \lambda_k^- w_{kR} r^k)_{i+1/2} \quad (16.104)$$

ただし $(w_{kL})_{i+1/2} = L_{i+1/2} q_{i+1/2L}$ ， $(w_{kR})_{i+1/2} = L_{i+1/2} q_{i+1/2R}$ である．また跳躍量を考慮する場合には流束は式 (16.103) のセル境界値を用い Roe の近似リーマン解 (16.90) から求められる．なお

$$F(q_{i+1/2L}) = (Aq_L)_{i+1/2} = \sum_k (\lambda_k w_{kL} r^k)_{i+1/2}$$

$$F(q_{i+1/2R}) = (Aq_R)_{i+1/2} = \sum_k (\lambda_k w_{kR} r^k)_{i+1/2}$$

時間積分は陽的にまたは△形陰解法の定常または非定常流れの式

$$-\theta\lambda A^+ \delta q_{i-1}^n + (1 + \theta\lambda|A|)\delta q_i^n + \theta\lambda A^- \delta q_{i+1}^n = rhs^n$$

$$\lambda = \Delta t / \Delta x, \quad rhs = -\lambda(\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}),$$

$$q^{n+1} = q^n + \delta q^n$$

$$-\theta\lambda A^+ \delta q_{i-1}^{(m)} + (1 + \theta\lambda|A|)\delta q_i^{(m)} + \theta\lambda A^- \delta q_{i+1}^{(m)} = -(q_i^{(m)} - q_i^n) + \frac{1}{2}(rhs^n + rhs^{(m)})$$

$$q^{(m+1)} = q^{(m)} + \delta q^{(m)}$$

を予測子修正子法で計算することによって行われる．詳細は次節のプログラムとその説明を参照されたい．

セル平均値 q_i^{n+1} は前記の式 (16.93) から求められる．

この項の終わりに以上のべた流束差分分離法と有限体積法の関連について述べる．

(i) 流束差分分離法では関数 $q(x)$ は点 x_i における値 q_i の多項式によって近似されるのに対し，有限体積法では関数 $q(x)$ は i 番目の格子セルの平均値 q_i の区分的多項式によって近似される．

(ii) 流束差分分離法では中間点 $x_{i+1/2}$ における数値流束 $H_{i+1/2}$ の値が Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームによって直接的に求められる．一方有限体積法ではセル境界における $q_{i+1/2L}$ ， $q_{i+1/2R}$ の値がまず3次の TVD スキームによって求められ，これらの値から流束 $F(q_{i+1/2L})$ ， $F(q_{i+1/2R})$ が求められる．

(iii) 流束差分分離法では流束分離は (ii) の段階で実行され，流束 $H_{i+1/2}$ の値は上流側にシフトした3点の流束 F_i から求められる．一方有限体積法ではこの段階では上流化された流束と下流化された流束の平均が

取られ，上流化はセル境界から発生する 3 つの波の上流側に流束のセル境界値を取ることによって達成される．有限体積法の上流化の効果は流れの変化が緩やかなところでは流束差分分離法に比べて弱いといえる．これら 2 つの解法の流束の計算式は次のようになる．

流束差分分離法：

$$F_{i+1/2} = F_i^+ + \frac{1}{6}\Delta\tilde{F}_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3}\Delta\tilde{F}_{i+1/2}^+ + F_{i+1}^- - \frac{1}{6}\Delta\tilde{F}_{i+3/2}^- - \frac{1}{3}\Delta\tilde{F}_{i+1/2}^- \quad (16.105a)$$

$$\Delta F_{j+1/2}^\pm = A_{i+1/2}^\pm \Delta q_{j+1/2} \quad \text{or} \quad = R_{j+1/2} |\text{sign} A_{i+1/2}^\pm| (AL\Delta q)_{j+1/2}$$

有限体積法：

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ F(q_{i+1/2L}) + F(q_{i+1/2R}) - \sum_k |\bar{\lambda}_k| \partial \bar{w}_k \bar{r}^k \right\} \quad (16.105b)$$

$$= F(q_{i+1/2L}) + \sum_k \bar{\lambda}_k^- \partial \bar{w}_k \bar{r}^k$$

$$= F(q_{i+1/2R}) - \sum_k \bar{\lambda}_k^+ \partial \bar{w}_k \bar{r}^k$$

$$q_{i+1/2L} = q_i + \frac{1}{6}\Delta\tilde{q}_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta\tilde{q}_{i+1/2},$$

$$q_{i+1/2R} = q_{i+1} - \frac{1}{6}\Delta\tilde{q}_{i+3/2} - \frac{1}{3}\Delta\tilde{q}_{i+1/2}$$

なお有限体積法の 3 つの式は等価である．

まず流れが十分に滑らかに変化している場合，minmod 制限関数が働かず境界の跳躍量が無視できる場合を考える．これら 2 つの解法の式は異なる考えに基づいて導かれたものであるがかなりの類似性がある．これら 2 つの解法で中間点またはセル境界の流束 $F_{i+1/2} = A_{i+1/2} q_{i+1/2}$ は， $q_{i+1/2}$ の部分のみが精度良く求められ， $A_{i+1/2}$ の部分は点 $i+1/2$ の値が用いられる．またその計算式は， F_{i-1} ， F_i ， F_{i+1} からの 2 次補間式ではなく，流束差分分離法では $(F_x)_i = (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})/\Delta x$ が 3 次相当精度で計算されるようにしたものの，他方有限体積法では関数 $q(x)$ を区分的 2 次式で近似したときのセル境界値を求める式である．このように異なる考えから導かれたものではあるが，これら 2 つの解法の式は形式的に同じものになり，精度も同等で 3 次である．跳躍量を考慮し Roe の近似リーマン解を補ったものも形式的には 3 次であるが，minmod 制限関数が働けば 2 次に落ちる．

16.6 数値計算例 I

本節にはまずプログラムに用いられる計算法について補足説明する．次にスカラー輸送方程式の初期値問題とリーマン問題の，プログラムと計算結果を示す．

16.6.1 計算法の補足

下記のプログラムでは時間積分は Runge-Kutta 法で陽的にまたは Crank-Nicholson 予測子修正子法で陰的に行われる．まず常微分方程式 $u_t + f_x(u) = 0$ の初期値問題を解く Runge-Kutta 公式を結果のみ示す．

$$2 \text{ 次公式: } u^{n+1} = u^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (16.106)$$

$$k_1 = -\Delta t f_x(u^n), \quad k_2 = -\Delta t f_x(u^n + k_1)$$

$$3 \text{ 次公式: } u^{n+1} = u^n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (16.107)$$

$$k_1 = -\Delta t f_x(u^n), \quad k^* = -\Delta t f_x(u^n + k_1/4),$$

$$k_2 = -\Delta t f_x(u^n + k^*/2), \quad k_3 = -\Delta t f_x(u^n + k_2)$$

$$4 \text{ 次公式: } u^{n+1} = u^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (16.108)$$

$$k_1 = -\Delta t f_x(u^n), \quad k_2 = -\Delta t f_x(u^n + k_1/2),$$

$$k^* = -\Delta t f_x(u^n + (k_1 + k_2)/4), \quad k_3 = -\Delta t f_x(u^n + k^*/2),$$

$$k_4 = -\Delta t f_x(u^n + k^*)$$

また Crank-Nicholson 予測子修正子法の式は

$$\left(1 + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x} a\right) \Delta u^{(m)} = -(u^{(m-1)} - u^n) + \frac{1}{2}(rhs^n + rhs^{(m-1)}), \quad rhs = -\Delta t f_x \quad (16.109)$$

である．その予測子の計算では右辺の $u^{(0)} = u^n$, $rhs^{(0)} = rhs^n$ と置いて $\Delta u^{(1)}$ を求め，予測子 $u^{(1)} = u^{(0)} + \Delta u^{(1)}$ を求める．次にこのようにして求めた $u^{(1)}$ を上式に用い修正子 $u^{(2)}$ を求める．なお通常， $\theta = 1/2$ に取られ， $\Delta u^{(m)}$ の値は 3 重対角行列の連立 1 次方程式をガウス消去法で解くことによって求められる．実際の計算では修正子 $u^{(2)}$ は予測子 $u^{(1)}$ と明らかに違うが，更に反復して求めた修正子 $u^{(3)}$ は $u^{(2)}$ と最大 1000 分の幾つか違う程度で，通常は $u^{(3)}$ までで十分である．

次に制限関数に関して述べる．最も良く知られているものは minmod 制限関数で， $\Psi(r) = \min\text{mod}(r, 1) = \max[0, \min(r, 1)]$ のように定義される．2 次上流差分と 2 次中心差分の数値流束はこの minmod 関数を用いて TVD 化すれば次のようになる．

$$h_{1/2}^{UD} = f_0 + \frac{1}{2} \min\text{mod}(R, 1) \Delta f_{1/2} = f_0 + \frac{1}{2} \begin{cases} \Delta f_{1/2} & (R > 1) & (2 \text{ 次中心差分}) \\ \Delta f_{-1/2} & (0 \leq R \leq 1) & (2 \text{ 次上流差分}) \\ 0 & (R < 0) & (1 \text{ 次上流差分}) \end{cases}$$

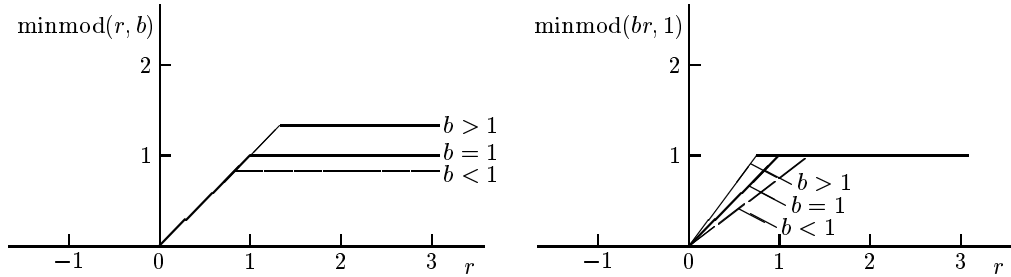
$$h_{1/2}^{CD} = f_0 + \frac{1}{2} \min\text{mod}(r, 1) \Delta f_{-1/2} = f_0 + \frac{1}{2} \begin{cases} \Delta f_{-1/2} & (r > 1) & (2 \text{ 次上流差分}) \\ \Delta f_{1/2} & (0 \leq r \leq 1) & (2 \text{ 次中心差分}) \\ 0 & (r < 0) & (1 \text{ 次上流差分}) \end{cases}$$

ただし $r = 1/R = \Delta f_{1/2} / \Delta f_{-1/2}$ である．この制限関数は勾配 $\Delta f_{1/2}$ または $\Delta f_{-1/2}$ の大きさを隣の勾配 $\Delta f_{-1/2}$ または $\Delta f_{1/2}$ と比較し制限するもので，勾配制限関数と呼ばれる．つまり当該勾配と隣の勾配の大きさを比較し小さい方を取ることによってスキームを安定化しようとするものでその考え方は分かり易い．

minmod 関数を用いた 3 次 Chakravarthy-Osher TVD スキームの数値流束は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 h_{1/2}^{(3)} &= f_0 + \frac{1}{6} \min\text{mod}(br, 1) \Delta f_{-1/2} + \frac{1}{3} \min\text{mod}(r, b) \Delta f_{-1/2} \\
 &= f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_{-1/2} \cdot \frac{1}{3} \begin{cases} 1+2b & (r > b) \\ 1+2r & (1/b \leq r \leq b) \quad (3 \text{ 次上流差分}) \\ (b+2)r & (0 \leq r < 1/b) \\ 0 & (r < 0) \quad (1 \text{ 次上流差分}) \end{cases} \quad (16.110)
 \end{aligned}$$

上式の 2 次中心差分の部分の $\min\text{mod}(r, b) \Delta f_{-1/2} = \min\text{mod}(\Delta f_{1/2}, b \Delta f_{-1/2})$ は、当該勾配 $\Delta f_{1/2}$ の大きさを隣の勾配 $\Delta f_{-1/2}$ を b 倍したものと比較し制限するものである。3 次上流差分で精度良く計算する範囲を確保するために、 $\Delta f_{1/2}$ の大きさが $\Delta f_{-1/2}$ より大になってもただちに制限関数が働かないように、通常 $b > 1$ に取られる。逆に $b < 1$ に取るとは、 $\Delta f_{1/2}$ の大きさが $\Delta f_{-1/2}$ より小であるにもかかわらず更に小にすることで通常あり得ないことである。上式の 2 次上流差分の部分 $\min\text{mod}(br, 1) \Delta f_{-1/2} = \min\text{mod}(\Delta f_{-1/2}, b \Delta f_{1/2})$ は、当該勾配 $\Delta f_{-1/2}$ の大きさを隣の勾配 $\Delta f_{1/2}$ を b 倍したものと比較し制限するもので、中心差分の場合と同様のことが言える。下図参照。



次に他の制限関数について述べる。図 16.12 は基本的制限関数のいくつかを示したものである。TVD スキームの数値流束を一般に

$$h_{1/2} = f_0 + \frac{1}{2} \Psi(r) \Delta f_{-1/2} \quad (16.111)$$

のように表すことにする。制限関数 $\Psi(r)$ は必ず $\Psi(1) = 1$ の点を通る。これは $f(x)$ が直線で 2 つの勾配 $\Delta f_{-1/2}$ と $\Delta f_{1/2}$ が等しいときには制限関数は不要で、数値流束 $f_{1/2}$ はこの線上に取られるということである。またすべての制限関数は上記の $\min\text{mod}(r, 1)$ と P.L. Roe によって提示された ‘superbee’ と呼ばれ

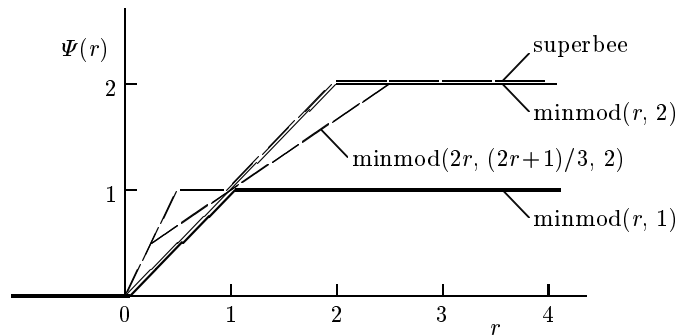


図 16.12: 各種制限関数

る制限関数 $\text{superbee} = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$ の間の領域に入る． minmod 関数では 2 つの勾配の大きさを比べ小さい方が取られたのに対し superbee では大きい方が取られる．また superbee では 2 つの勾配比は 2 以下に制限される．つまり，スキームを TVD 化するためには数値流束の勾配そのものの大きさは小さくしても大きくしても良いが，勾配比すなわち曲率の大きさは制限しなければならないということである．

次に制限関数 superbee について述べる．2 次上流差分と 2 次中心差分の数値流束は関数 superbee を用いて TVD 化すれば同じものになる．

$$\begin{aligned}
 h_{1/2}^{UD} &= h_{1/2}^{CD} = f_0 + \frac{1}{2} \text{superbee}(r) \Delta f_{-1/2} \\
 &= f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_{-1/2} \begin{cases} 2 & (r > 2) \\ r & (1 \leq r \leq 2) \quad (2 \text{ 次中心差分}) \\ 1 & (1/2 \leq r < 1) \quad (2 \text{ 次上流差分}) \\ 2r & (0 \leq r < 1/2) \\ 0 & (r < 0) \quad (1 \text{ 次上流差分}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

したがって superbee を用いた 3 次 Chakravarthy-Osher TVD スキームの数値流束も同じものになり，その精度は 2 次になる．関数 superbee が制限関数の上方の限界になる理由は， $\text{minmod}(r, 1)$ が下方の限界になるのと同様である． superbee は当該勾配の大きさを隣の勾配と比較し大の方を取るもので， superbee の線の上にある制限関数は比較対象の勾配を超えて更に大にするもので，これは解の精度を損ね不安定性をまねくおそれのあるものである．図 16.12 において， $\Psi(r) = r$ の線は 2 次中心差分， $\Psi(r) = 1$ は 2 次上流差分， $\Psi(r) = 0$ は 1 次上流差分， $\Psi(r) = (1+2r)/3$ は 3 次上流差分を表し，また $\Psi(r) = 2r$ の線は 2 次中心差分の $h_{1/2}$ が極値にならない限界， $\Psi(r) = 2$ の線は 2 次上流差分の $h_{1/2}$ が極値にならない限界を示している．

なお Chakravarthy-Osher スキームは 2 次上流差分と 2 次中心差分の線形結合を取ることによって精度を 3 次に改善したものであるが，同じことは 2 次上流差分または 2 次中心差分の制限関数を次のように選ぶことによっても実現できる．

$$\begin{aligned}
 h_{1/2}^{(3)} &= f_0 + \frac{1}{2} \text{minmod}(2R, (2+R)/3, 2) \Delta f_{1/2} = f_0 + \frac{1}{2} \text{minmod}(2r, (2r+1)/3, 2) \Delta f_{-1/2} \\
 &= f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_{-1/2} \begin{cases} 2 & (r > 2.5) \\ (1+2r)/3 & (0.25 \leq r \leq 2.5) \quad (3 \text{ 次上流差分}) \\ 2r & (0 \leq r < 0.25) \\ 0 & (r < 0) \quad (1 \text{ 次上流差分}) \end{cases} \tag{16.112}
 \end{aligned}$$

16.6.2 スカラー輸送方程式の初期値問題

まずここで解く1次元スカラー輸送方程式の初期値問題について説明する．ここでは波の位相速度 $a = 1$, 波の伝播時間 $tt = T = 2$ に与えているが, これらの値は任意に与えることもできる．例えば $a = -1$ に取れば, PARAMETER is=-200, if=100 に変更することになる．クーラン数 CFL は 0.25, 0.50, 0.75, 1.0 から選ばれるが, 任意に与えることもできる．初期の波形は PROBLEM 1 の矩形波または PROBLEM 2 の帆船波から選ばれる．これらの波は一樣速度で分散せずに伝播する．

ここでは mode=11 から mode=84 までの都合 15 通りの解法を用意した．サブルーチン CALFVS, CALFDS, CALFVM は, この1次元問題を圧縮性流れへ拡張したときに, それぞれ流束ベクトル分離法, 流束差分分離法, 有限体積法になるものである．計算で求めた時間 T における波形, スカラー量 $u(x_i, T) = u_i^{n_f}$ の値は, 配列 ur に記憶され, ファイル OUTPUT.dat とグラフィックサブルーチン SCALARG によりパソコン画面上に出力される．次に FORTRAN 95/90 Free source form で書かれたプログラムを示す．

```
PROGRAM MAIN
!*****
! Problem: Initial value problem of 1D scalar transport equation
! Numerical Method: Flux vector splitting, Flux difference splitting, finite volume method
!*****
PARAMETER(is=0,if=300)
DIMENSION x(is:if),u(is:if),u0(is:if),ur(0:100,0:18),ii(0:100),cfld(8)
CHARACTER*30 zm(100),z(24)
COMMON na,dt,dx,a
DATA dx,pi/.01, 3.14159/           !dx:pitch of calculating points
FORALL(i=is:if)x(i)=dx*i
DATA a,tt/1., 2./           !Set a:phase velocity and tt:total phys time, should be taken |a|*tt<=2.
DATA cfld/.1, .25, .5, .75, 1., 1.25, 1.6, 2./
CFL=cfld(4); dt=CFL*dx/ABS(a)           !Choose CFL number from cfld, CFL=|a|*dt/dx.
naf=INT(tt/dt+.5)           !tt=dt*naf, naf:max iteration number
! Initial data
IPProblem=1           !Choose IPProblem=1(rectangle wave) or =2(sail-boat wave)
IF(IPProblem==1)FORALL(i=35:65)u0(i)=1.
IF(IPProblem==2)THEN
  FORALL(i=20:50)u0(i)=SIN(.4*pi*FLOAT(i-20)/30)/SIN(.4*pi)
  FORALL(i=51:80)u0(i)=.4*(SIN(.5*pi+pi/3.*FLOAT(i-50)/30)-.5)
ENDIF
FORALL(i=0:100)ur(i,0)=u0(i)           !exact solution
i00=INT(a*tt/dx+1000.1)-1000
FORALL(i=0:100)ii(i)=i00+i
zm(1)='blank'
zm(11)='Roe scheme, explicit Euler'   ' !mode=11
zm(21)='QUICK, 3rd-order RK'         ' !mode=21
zm(22)='QUICK, CNpcm'                ' !mode=22
zm(41)='3rd CO and RK, minmod'       ' !mode=41
zm(42)='3rd CO and RK, superbee'     ' !mode=42
zm(43)='3rd CO, CNpcm, minmod'       ' !mode=43
zm(44)='3rd CO, CNpcm, superbee'     ' !mode=44
zm(61)='MUSCL, 2-step, minmod'       ' !mode=61
zm(62)='MUSCL, 2-step, superbee'     ' !mode=62
zm(63)='2nd Roe scheme, minmod'     ' !mode=63
zm(64)='2nd Roe scheme, superbee'    ' !mode=64
zm(81)='3rd FVM and RK, minmod'      ' !mode=81
zm(82)='3rd FVM and RK, superbee'    ' !mode=82
zm(83)='3rd FVM, CNpcm, minmod'     ' !mode=83
zm(84)='3rd FVM, CNpcm, superbee'    ' !mode=84
```



```

!2nd: 2nd-order   Roe: 1st-order Roe scheme   CO: Chakravarthy-Osher type scheme
!FVM: finite volume method   Euler: 1st-order forward Euler
!RK: Runge-Kutta method   CNpcm: Crank-Nicholson predictor-corrector method
! Solution of 1D scalar transport equation
DO k=1,18
  SELECT CASE(k)
    CASE(1) ; mode=11;   CASE(2) ; mode=21;   CASE(3) ; mode=22;
    CASE(4) ; mode=41;   CASE(5) ; mode=42;   CASE(6) ; mode= 0;
    CASE(7) ; mode=43;   CASE(8) ; mode=44;   CASE(9) ; mode= 0;
    CASE(10); mode=61;   CASE(11); mode=64;   CASE(12); mode= 0;
    CASE(13); mode=81;   CASE(14); mode=82;   CASE(15); mode= 0;
    CASE(16); mode=83;   CASE(17); mode=84;   CASE(18); mode= 0;
  ENDSELECT
  z(k)=zm(mode)
  FORALL(i=is:if)u(i)=u0(i)
  na=0; 100 na=na+1
  IF(mode<=29)          CALL CALFVS(x,u,is,if,mode) !flux vector splitting
  IF(mode>29.AND.mode<60)CALL CALFDS(x,u,is,if,mode) !flux-difference splitting
  IF(mode>=60)          CALL CALFVM(x,u,is,if,mode) !finite volume methods
  IF(na<naf)            GOTO 100
  FORALL(i=0:100)ur(i,k)=u(i00+i)
ENDDO
! Output of computational results
OPEN(20,FILE='OUTPUT.dat')
DO k=1,18
  WRITE(20,'(//1H 2X A6,A6,I3,3X A30,A6/)'')'***** ',mode=',mode,z(k),' *****'
  DO l=0,3; il=l*25
    WRITE(20,'(2X 26F9.3)')( ur(i,k),i=il,il+25)
    WRITE(20,'( 26I9/ )')(ii(i),i=il,il+25)
  ENDDO; ENDDO
CLOSE(20)
CALL SCALARG(x,ur,is,if,z)          !Graphics
STOP
END PROGRAM MAIN

! ***** Solve 1D scalar transport equation by flux vector splitting
SUBROUTINE CALFVS(x,u,is,if,mode)
DIMENSION x(is:if),u(is:if),f(is:if), &
          v(is:if),uks(is:if),uk1(is:if),uk2(is:if),uk3(is:if), & !use only for Runge-Kutta
          u1(is:if),f1(is:if),rhs(is:if),c(is:if,3) !use only for CNpcm
COMMON na,dt,dx,a
FORALL(i=is:if)v(i)=u(i)

IF(mode==11)THEN !Roe scheme
  CALL FLUXR(u,f,is,if)
  FORALL(i=is+2:if-2)u(i)=u(i)-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
ENDIF

IF(mode==21)THEN !QUICK scheme, 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUXQ(u,f,is,if)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk1(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk1(i)/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUXQ(v,f,is,if)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uks(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)/2.
  ENDFORALL

```

```

CALL FLUXQ(v,f,is,if)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk2(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk2(i)
ENDFORALL
CALL FLUXQ(v,f,is,if)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk3(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
  u(i)=u(i)+(uk1(i)+4.*uk2(i)+uk3(i))/6.
ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==22)THEN !QUICK scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=is+3; ie=if-3; dxt=dt*.5/dx; am=(a-ABS(a))/2.; ap=(a+ABS(a))/2.
  FORALL(i=is:if)u1(i)=u(i)
  CALL FLUXQ(u,f,is,if)
  m=-1; 100 m=m+1
  CALL FLUXQ(u1,f1,is,if)
  DO i=ib,ie
    c(i,1)=-dxt*ap
    c(i,2)=1.+dxt*(ap-am)
    c(i,3)=dxt*am
    rhs(i)=-u1(i)-u(i)-dxt*(f(i)-f(i-1)+f1(i)-f1(i-1)) !right hand side
  ENDDO
  CALL GAUSS3(c,rhs,is,if,ib,ie)
  FORALL(i=ib:ie)u1(i)=u1(i)+rhs(i)
  IF(m<2) GOTO 100
  FORALL(i=ib:ie)u(i)=u1(i)
ENDIF
END SUBROUTINE CALFVS

! ***** FLUXR
SUBROUTINE FLUXR(u,f,is,if)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
FORALL(i=is+1:if-2)f(i)=ap*u(i)+am*u(i+1)
ENDSUBROUTINE FLUXR

! ***** FLUXQ
SUBROUTINE FLUXQ(u,f,is,if)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
FORALL(i=is+2:if-3)f(i)=ap*(-u(i-1)+6.*u(i)+3.*u(i+1))/8.+am*(3.*u(i)+6.*u(i+1)-u(i+2))/8.
ENDSUBROUTINE FLUXQ

! ***** Solve 1D scalar transport eq by flux difference splitting
SUBROUTINE CALFDS(x,u,is,if,mode)
DIMENSION x(is:if),u(is:if),f(is:if),fdc(10),fdc1(10), &
  v(is:if),uks(is:if),uk1(is:if),uk2(is:if),uk3(is:if), & !only use for Runge-Kutta
  u1(is:if),f1(is:if),rhs(is:if),c(is:if,3) !only use for CNpcm
COMMON na,dt,dx,a
FORALL(i=is:if)v(i)=u(i)

IF(mode==41.OR.mode==42)THEN !CO scheme, 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUXCO(u,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk1(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk1(i)/2.
  ENDFORALL

```

```

CALL FLUXCO(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uks(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)/2.
ENDFORALL
CALL FLUXCO(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk2(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk2(i)
ENDFORALL
CALL FLUXCO(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk3(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
  u(i)=u(i)+(uk1(i)+4.*uk2(i)+uk3(i))/6.
ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==43.OR.mode==44)THEN !CO scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=is+3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
  FORALL(i=is:if)u1(i)=u(i)
  CALL FLUXCO(u,f,is,if,mode)
  m=-1; 100 m=m+1
  CALL FLUXCO(u1,f1,is,if,mode)
  DO i=ib,ie
    c(i,1)=-dxt*ap
    c(i,2)=1.+dxt*(ap-am)
    c(i,3)=dxt*am
    rhs(i)=-u1(i)-u(i)-dxt*(f(i)-f(i-1))+f1(i)-f1(i-1)) !right hand side
  ENDDO
  CALL GAUSS3(c,rhs,is,if,ib,ie)
  FORALL(i=ib:ie)u1(i)=u1(i)+rhs(i)
  IF(m<2) GOTO 100
  FORALL(i=ib:ie)u(i)=u1(i)
ENDIF

ENDSUBROUTINE CALFDS

! ***** FLUXCO
SUBROUTINE FLUXCO(u,f,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
b=2.
DO i=is+2,if-3
  dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i); du1=u(i+2)-u(i+1)
  IF(mode==41.OR.mode==43)THEN
    f(i)=ap*(u(i) +AMINMOD(dua,b*du0)/6.+AMINMOD(du0,b*dua)/3.) &
      +am*(u(i+1)-AMINMOD(du1,b*du0)/6.-AMINMOD(du0,b*du1)/3.)
  ELSE
    f(i)=ap*(u(i)+SUPERBEE(dua,du0)/2.)+am*(u(i+1)-SUPERBEE(du1,du0)/2.)
  ENDIF
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXCO

! ***** Solve 1D scalar transport eq by finite volume method
SUBROUTINE CALFVM(x,u,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if), &
  v(is:if),uks(is:if),uk1(is:if),uk2(is:if),uk3(is:if), & !only use for Runge-Kutta
  u1(is:if),f1(is:if),rhs(is:if),c(is:if,3) !only use for CNpcm
COMMON na,dt,dx,a
FORALL(i=is:if)v(i)=u(i)

```

```

IF(mode==61)THEN !MUSCL, 2-step time integration
  CALL FLUXM(u,f,is,if)
  FORALL(i=is+2:if-2)v(i)=u(i)-dt/(2.*dx)*(f(i)-f(i-1))
  CALL FLUXM(v,f,is,if)
  FORALL(i=is+2:if-2)u(i)=u(i)-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
ENDIF

IF(mode==63.OR.mode==64)THEN !2nd-order Roe scheme
  CALL FLUXR2(u,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+2:if-2)u(i)=u(i)-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
ENDIF

IF(mode==81.OR.mode==82)THEN !3rd-order FVM and 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUX3(u,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+2:if-2)
    uk1(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk1(i)/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+2:if-2)
    uks(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+2:if-2)
    uk2(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk2(i)
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+2:if-2)
    uk3(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
    u(i)=u(i)+(uk1(i)+4.*uk2(i)+uk3(i))/6.
  ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==83.OR.mode==84)THEN !3rd-order FVM, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=is+3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
  FORALL(i=is:if)u1(i)=u(i)
  CALL FLUX3(u,f,is,if,mode)
  m=-1; 100 m=m+1
  CALL FLUX3(u1,f1,is,if,mode)
  DO i=ib,ie
    c(i,1)=-dxt*ap
    c(i,2)=1.+dxt*(ap-am)
    c(i,3)=dxt*am
    rhs(i)=-u1(i)-u(i)-dxt*(f(i)-f(i-1)+f1(i)-f1(i-1)) !right hand side
  ENDDO
  CALL GAUSS3(c,rhs,is,if,ib,ie)
  FORALL(i=ib:ie)u1(i)=u1(i)+rhs(i)
  IF(m<2) GOTO 100
  FORALL(i=ib:ie)u(i)=u1(i)
ENDIF
ENDSUBROUTINE CALFVM

! ***** FLUXM
SUBROUTINE FLUXM(u,f,is,if)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
DO i=is+1,if-2

```

```

    dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i); du1=u(i+2)-u(i+1)
    ul=u(i )+.5*AMINMOD(dua,du0)
    ur=u(i+1)-.5*AMINMOD(du0,du1)
    f(i)=ap*ul+am*ur
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXM

! ***** FLUXR2
SUBROUTINE FLUXR2(u,f,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
DO i=is+1,if-2
    dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i); du1=u(i+2)-u(i+1)
    IF(mode==63)THEN
        ul=u(i )+.5*AMINMOD(dua,du0)
        ur=u(i+1)-.5*AMINMOD(du0,du1)
    ELSE
        ul=u(i )+.5*SUPERBEE(dua,du0)
        ur=u(i+1)-.5*SUPERBEE(du0,du1)
    ENDIF
    ul=ul-dt/dx*a*(ul-u(i))
    ur=ur-dt/dx*a*(u(i+1)-ur)
    f(i)=ap*ul+am*ur
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXR2

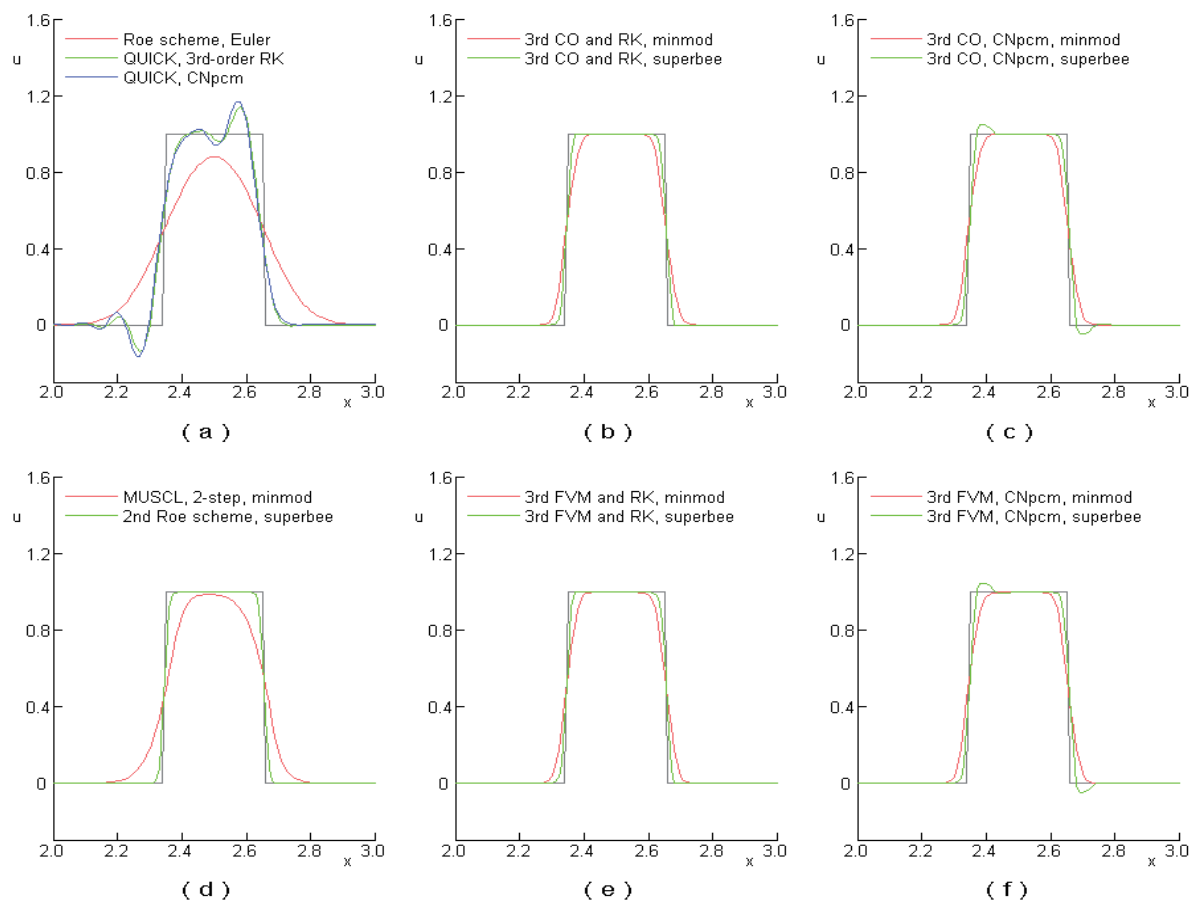
! ***** FLUX3
SUBROUTINE FLUX3(u,f,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
b=2.
DO i=is+1,if-2
    dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i); du1=u(i+2)-u(i+1)
    IF(mode==81.OR.mode==83)THEN
        f(i)=ap*(u(i )+AMINMOD(dua,b*du0)/6.+AMINMOD(du0,b*dua)/3.) &
            +am*(u(i+1)-AMINMOD(du1,b*du0)/6.-AMINMOD(du0,b*du1)/3.)
    ELSE
        f(i)=ap*(u(i)+SUPERBEE(dua,du0)/2.)+am*(u(i+1)-SUPERBEE(du1,du0)/2.)
    ENDIF
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUX3

! ***** Limiter minmod
FUNCTION AMINMOD(x,y)
    s=SIGN(1.,x); AMINMOD=s*MAX(0.,MIN(ABS(x),s*y))
END FUNCTION

! ***** Limiter superbee
FUNCTION SUPERBEE(x,y)
    s=SIGN(1.,x); SUPERBEE=s*MAX(0.,MIN(2.*ABS(x),s*y),MIN(ABS(x),2.*s*y))
END FUNCTION

! ***** Gaussian elimination for linear eqns with tri-diagonal matrix
SUBROUTINE GAUSS3(c,b,is,if,ib,ie)
DIMENSION c(is:if,3),b(is:if)
DO i=ib,ie-1
    b(i)=b(i)/c(i,2); c(i,3)=c(i,3)/c(i,2)

```

図 16.13: 矩形波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 0.50$

```

b(i+1)=b(i+1)-c(i+1,1)*b(i)
c(i+1,2)=c(i+1,2)-c(i+1,1)*c(i,3)
ENDDO
b(ie)=b(ie)/c(ie,2)
DO i=ie-1,ib,-1
  b(i)=b(i)-c(i,3)*b(i+1)
ENDDO
ENDSUBROUTINE GAUSS3

```

グラフィックサブルーチン SCALARG は省略した。サブルーチンの中身は、本文中の式や記号をほとんどそのままコード化しているので、だいたい分かると思うが、以下にはサブルーチン CALFDS の mode=41 から mode=44 の部分を例に簡単に説明する。

はじめに $\text{FORALL}(i=is:if) v(i)=u(i)$ と置くのは計算領域の両端にデータを入れるため、Runge-Kutta 法の計算は全領域ではなく $u_{i_s+3} \sim u_{i_f-3}$ の範囲で行われる。FLUXCO は制限関数 minmod または superbee を用いた Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームの数値流束を求めるサブルーチンで、既知の u_i から位相速度 $a_p, a_m = a^\pm$ に対し流束 $f(i) = f_{i+1/2}^\pm$ を計算するものである。なお $dua = \Delta u_{i-1/2}$, $du0 = \Delta u_{i+1/2}$, $du1 = \Delta u_{i+3/2}$ である。Crank-Nicholson 予測子修正子法の計算では、3重対角行列の連立 1 次方程式が解かれる。rhs, c はそれぞれ 3 重対角行列の連立 1 次方程式の右辺 → 解ベクトルまたは係数行列の配列、

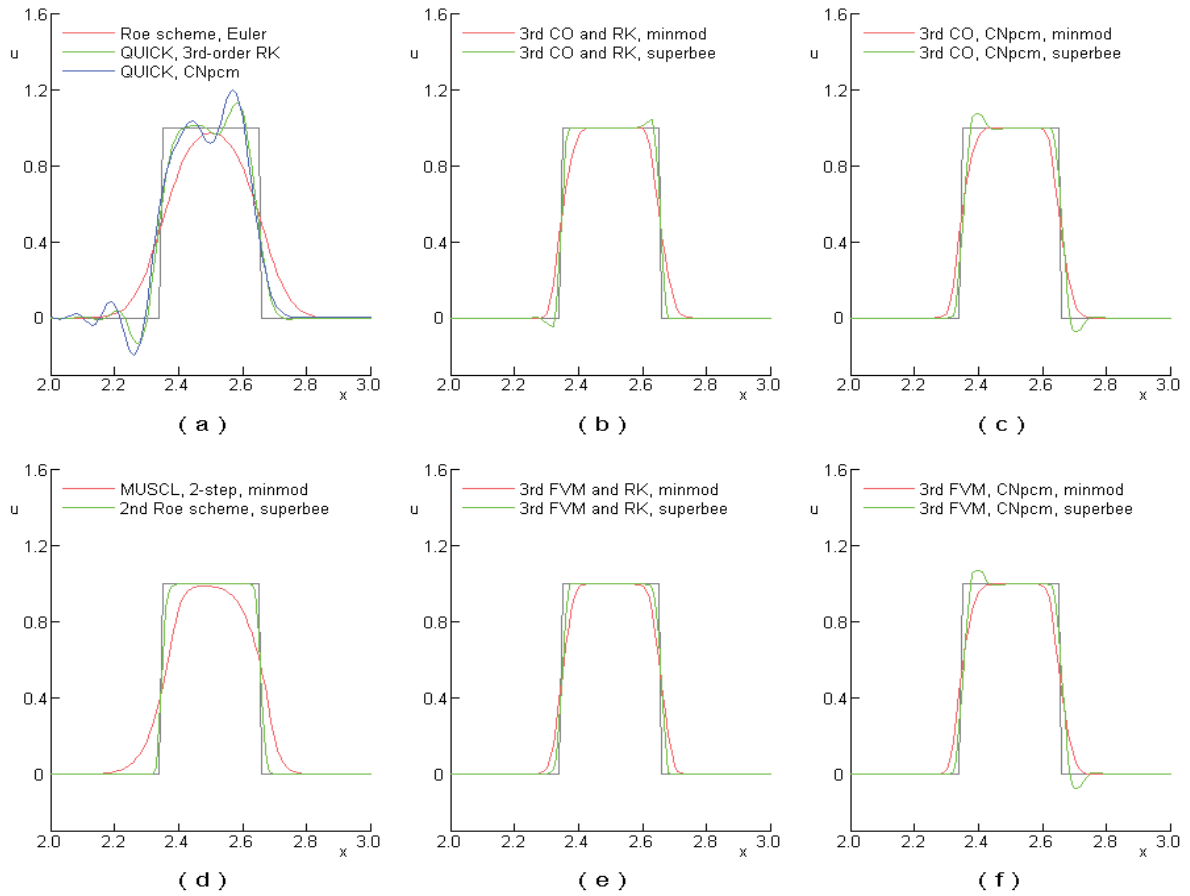


図 16.14: 矩形波 $a = 1, T = 2, CFL = 0.75$

GAUSS3 はこの連立 1 次方程式をガウス消去法で解くサブルーチンである．is ~ if のうち ib ~ ie の部分だけにデータが入り，この部分だけが計算されるようになっている．

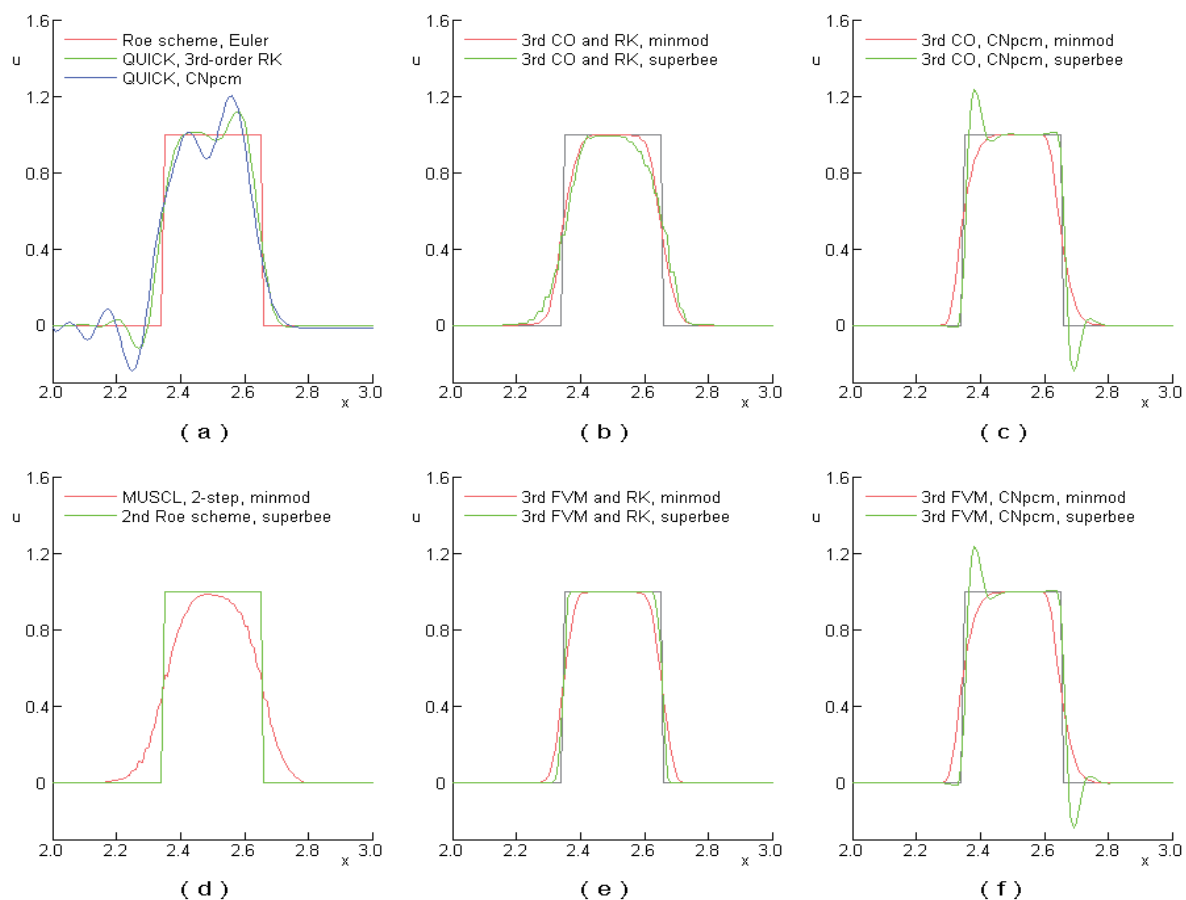
計算の結果を図?? ~ ??に示す．図 16.13 ~ 16.15 は矩形波，図 16.16 ~ 16.18 は帆船波の場合のものである．それぞれレイノルズ数 0.5, 0.75 または 1.0 の結果を示したが，一般的実用問題では，レイノルズ数は空間で変化するので，広いレイノルズ数の範囲で良い結果の得られるスキームが選ばれるべきである．このような不連続を含む問題では

mode=42 の 3 次 Chakravarthy-Osher TVD スキーム+3 次 Runge-Kutta 法

mode=64 の 2 次 Roe スキーム

mode=82 の 3 次有限体積法+3 次 Runge-Kutta 法

に制限関数 superbee を用いたものが優れている．しかしながらどの方法も，見解の相違もあるうが不連続を十分に捕らえているとはいえない．

図 16.15: 矩形波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 1.00$

16.6.3 リーマン問題

リーマン問題のプログラムを以下に示す．計算領域 $0 \leq x \leq 10$ に密度，流速，静圧の初期値， $u = 0$ と $\rho = p = 10$ ($x \leq 4$), $= 0.1$ ($x > 4$) を与え，オイラー方程式の初期値問題を上述の解法の中の9つで解く．計算は時間 $T = \Delta t \times n_f = 2$ まで行い，その時点の ρ, u, p の値を OUTPUT.dat ファイルに，それらのグラフをパソコン画面面上に出力する．サブルーチンの説明はプログラムの後である．

```
PROGRAM MAIN
!*****
! Problem: Riemann Shock Tube Flow Problem
! Numerical Method: Flux vector splitting, Flux difference splitting, finite volume method
!*****
PARAMETER (if=100)
DIMENSION x(0:if),q(0:if,3),q0(0:if,3),qs(0:if,3,0:9),rho(0:100),u(0:100),p(0:100),ii(0:if)
CHARACTER*30 zm(100),z(9)
COMMON na,dt,dx,ak
DATA dx,dt,naf,ak/.1, .01, 200, 1.4/
FORALL (i=0:if) ii(i)=i
FORALL (i=0:if) x(i)=dx*i
! Initial data
DATA rho/41*1., 60*.1/ u/101*0./ p/41*1., 60*.1/
!naf:iteration number
```

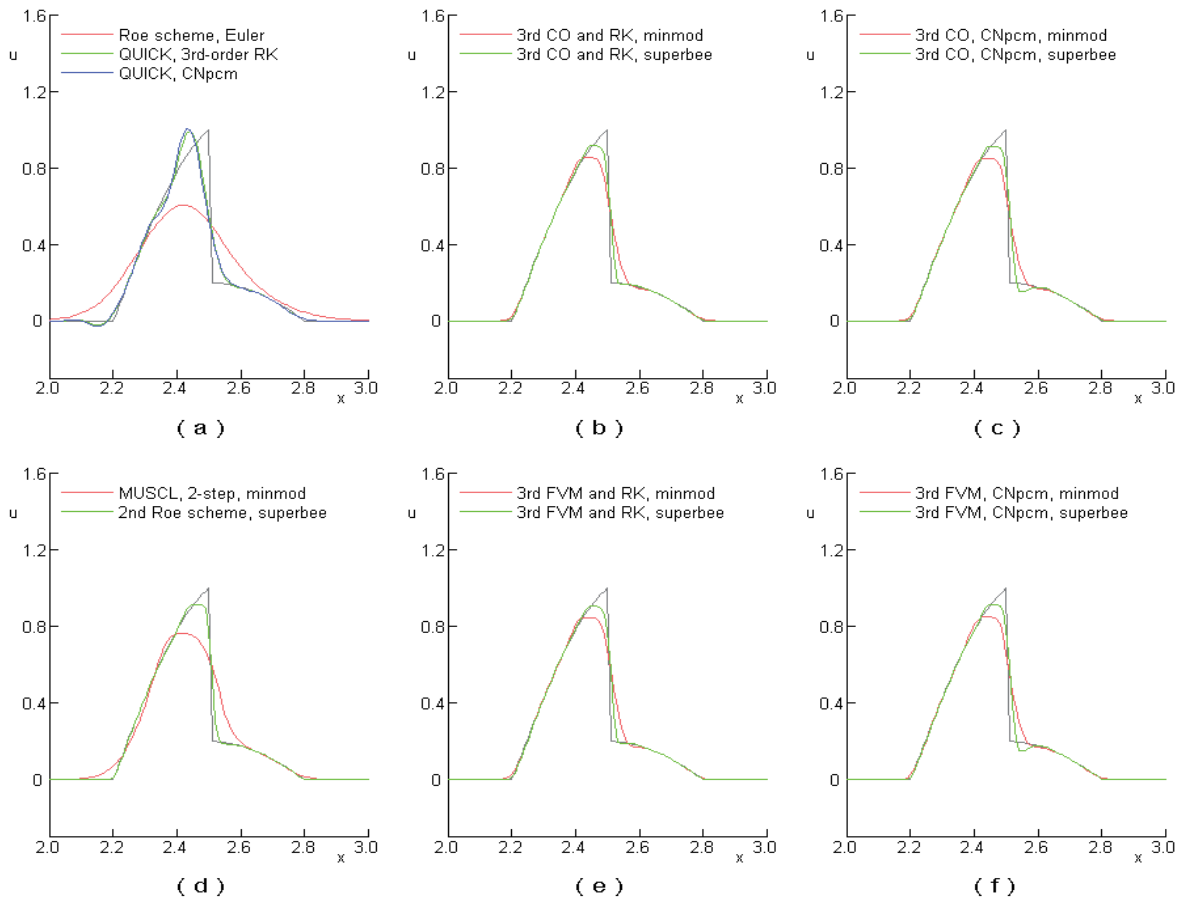
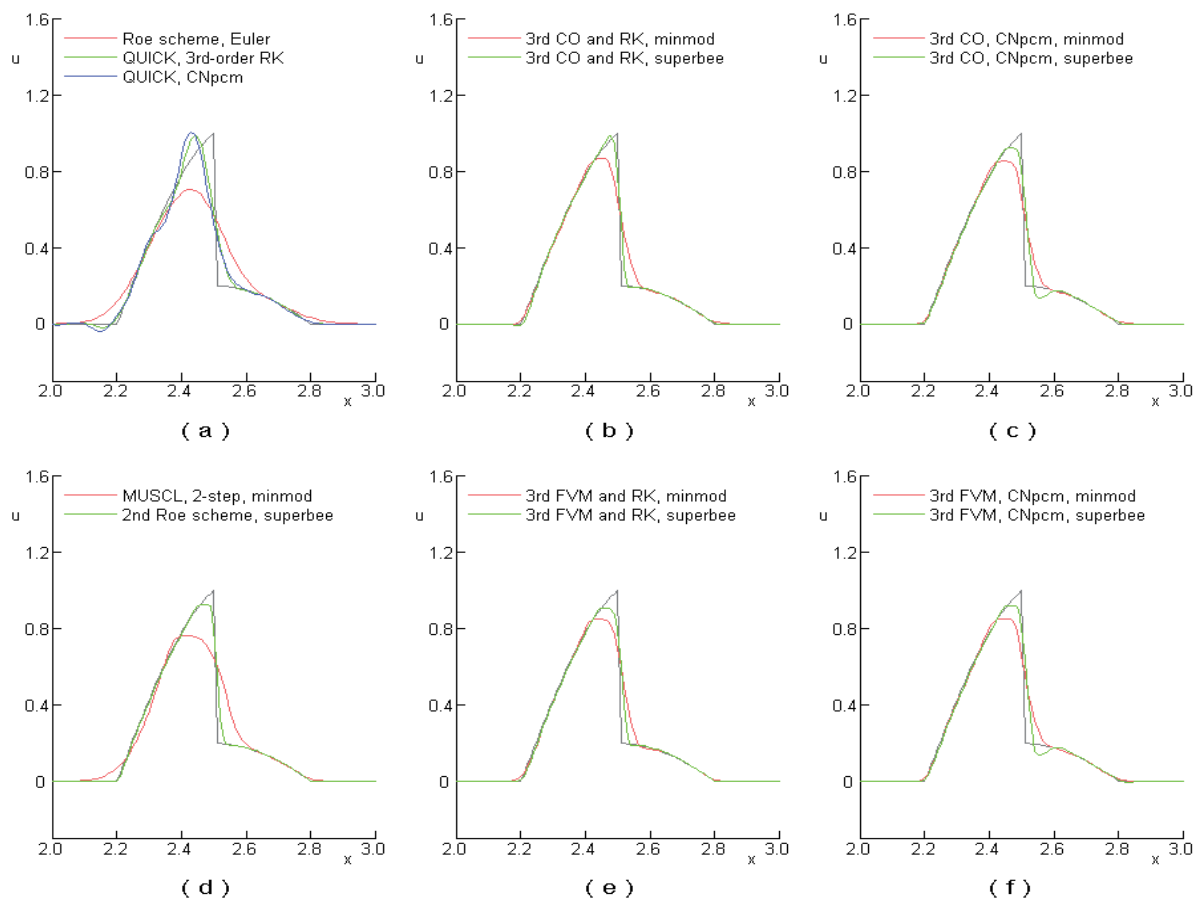



图 16.16: 帆船波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 0.50$

```

FORALL (i=0:if)
  q0(i,1)=rho(i); q0(i,2)=0.; q0(i,3)=p(i)/(ak-1.)
ENDFORALL
zm(11)='Roe scheme, explicit Euler' !mode=11
:
zm(84)='3rd-order FVM, CNpcm, superbee' !mode=84
! Solution of Riemann problem
DO k=1,9
  SELECT CASE(k)
  CASE(1); mode=11; CASE(2); mode=21; CASE(3); mode=41
  CASE(4); mode=42; CASE(5); mode=61; CASE(6); mode=64
  CASE(7); mode=81; CASE(8); mode=82; CASE(9); mode=84
  ENDSELECT
  z(k)=zm(mode)
  FORALL (i=0:if, j=1:3) q(i, j)=q0(i, j)
  na=0; 100 na=na+1
  IF(mode<=29) CALL CALFVS(q,if,mode) !fluc vector splitting schemes
  IF(mode>=30 .AND. mode<=59) CALL CALFDS(q,if,mode) !fluc difference splitting schemes
  IF(mode>=60) CALL CALFVM(q,if,mode) !finite volume methods
  IF(na<naf) GOTO 100
  FORALL (i=0:if)

```

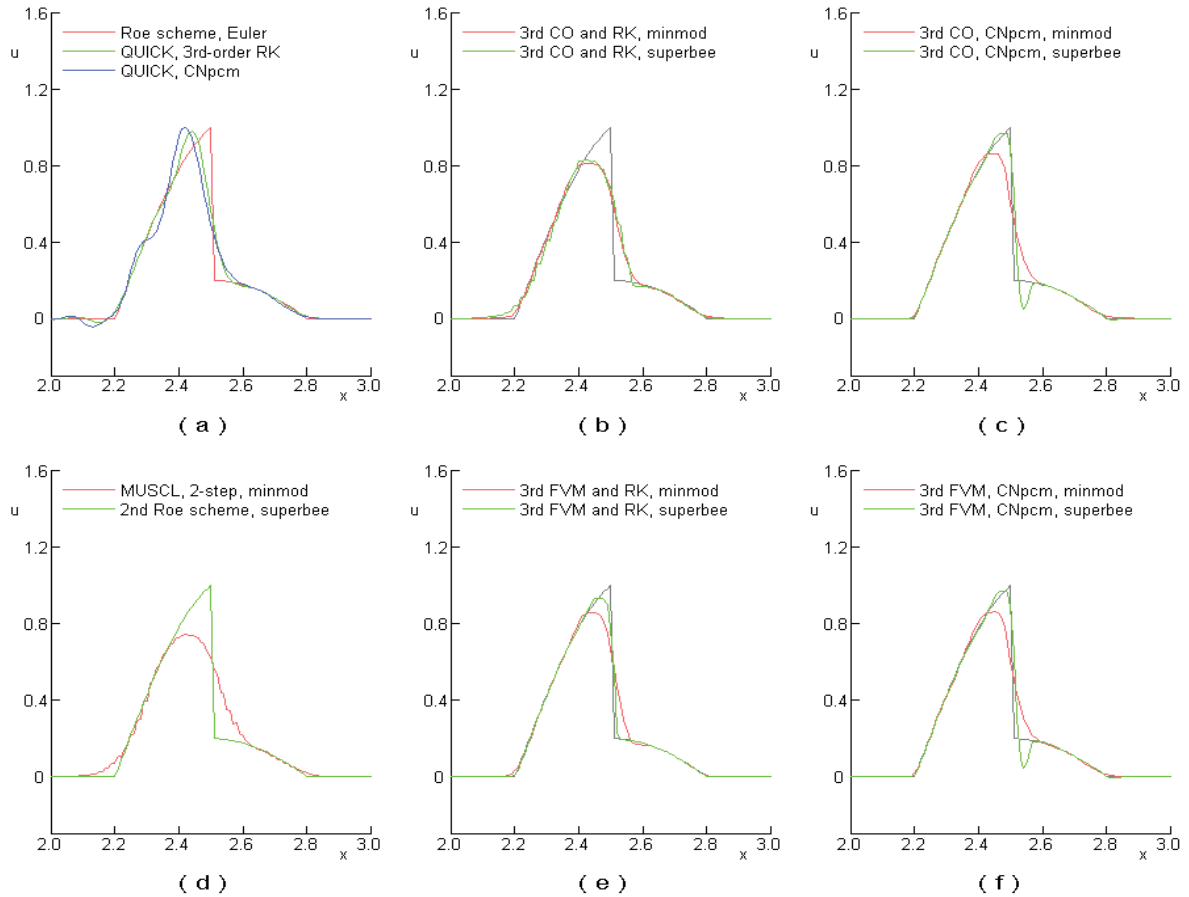
図 16.17: 帆船波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 0.75$

```

qs(i,1,k)=q(i,1); qs(i,2,k)=q(i,2)/q(i,1)
qs(i,3,k)=(ak-1.)*(q(i,3)-q(i,2)*qs(i,2,k)/2.)
ENDFORALL
ENDDO
! Output of computational results
OPEN(20,FILE='OUTPUT.dat')
DO k=1,9
WRITE(20,'(//1H 2X A6,A6,I3,3X A30,A6/)'')'***** ',mode='z(k)', '*****'
DO l=0,3; il=l*25
WRITE(20,'(A10,26F9.3)')'density =',(qs(i,1,k),i=il,il+25)
WRITE(20,'(A10,26F9.3)')'velocity =',(qs(i,2,k),i=il,il+25)
WRITE(20,'(A10,26F9.3)')'pressure =',(qs(i,3,k),i=il,il+25)
WRITE(20,'(8X 26I9/ )')(ii(i),i=il,il+25)
ENDDO; ENDDO
CLOSE(20)
CALL RIEMANNG(x,qs,if,z) !Graphics
STOP
END PROGRAM MAIN

! ***** Compute Riemann problem by flux vector splitting
SUBROUTINE CALFVS(q,if,mode)

```

图 16.18: 帆船波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 1.00$

```

DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3), &
      u(0:if,3),uks(0:if,3),uk1(0:if,3),uk2(0:if,3),uk3(0:if,3), & !only use for RK
      q1(0:if,3),f1(0:if,3),ap(3),am(3),amat(3,3),rhs(300),c(300,-5:5) !only use for CNpcm
COMMON na,dt,dx,ak
FORALL(i=0:if,j=1:3)u(i,j)=q(i,j)

IF(mode==11)THEN !Roe scheme, explicit Euler
  CALL FLUXR(q,f,if)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)q(i,j)=q(i,j)-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
ENDIF

IF(mode==21)THEN !QUICK scheme, 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUXQ(q,f,if)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk1(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk1(i,j)/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUXQ(u,f,if)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uks(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXQ(u,f,if)

```

```

FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uk2(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk2(i,j)
ENDFORALL
CALL FLUXQ(u,f,if)
FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uk3(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
  q(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+4.*uk2(i,j)+uk3(i,j))/6.
ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==22)THEN !QUICK scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=3; ie=if-3; dxt=dt*.5/dx
  FORALL(i=0:if,j=1:3)q1(i,j)=q(i,j)
  CALL FLUXQ(q,f,if)
  m=-1; 100 m=m+1
  CALL FLUXQ(q1,f1,if)
  DO i=ib,ie
    CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
    CALL AAA(u,c,ap,am)
    CALL MATRIX(i,q,if,ap,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii-3)=-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii)=dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    CALL MATRIX(i,q,if,am,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii)=c(3*i-3+ii,jj-ii)-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii+3)=dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    DO j=1,3
      c(3*i-3+j,0)=c(3*i-3+j,0)+1.
      rhs(3*i-3+j)=- (q1(i,j)-q(i,j))-dxt*(f(i,j)-f(i-1,j))+f1(i,j)-f1(i-1,j))
    ENDDO; ENDDO
    CALL GAUSSB(c,rhs,300,3*ib-2,3*ie,-5,5)
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q1(i,j)=q1(i,j)+rhs(3*i-3+j)
    IF(m<2) GOTO 100
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q(i,j)=q1(i,j)
  ENDF
END SUBROUTINE CALFVS

! ***** FLUXR
SUBROUTINE FLUXR(q,f,if)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ap(3),am(3),fp(3),fm(3)
COMMON na,dt,dx,ak
DO i=1,if-2
  CALL SUBSD(i,q,if,r0,u0,H0,c0)
  CALL SUBSD(i+1,q,if,r1,u1,H1,c1)
  CALL AAA((u0+u1)/2.,(c0+c1)/2.,ap,am)
  CALL SUBFVS(r0,u0,H0,c0,ap,fp)
  CALL SUBFVS(r1,u1,H1,c1,am,fm)
  FORALL(j=1:3)f(i,j)=fp(j)+fm(j)
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXR

! ***** FLUXQ
SUBROUTINE FLUXQ(q,f,if)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ap(3),am(3),fap(3),fop(3),f1p(3),f0m(3),f1m(3),f2m(3)

```

```

COMMON na,dt,dx,ak
DO i=1,if-2
  CALL SUBSD(i ,q,if,r0,u0,H0,c0)
  CALL SUBSD(i+1,q,if,r1,u1,H1,c1)
  CALL AAA((u0+u1)/2.,(c0+c1)/2.,ap,am)
  CALL SUBFVS(r0,u0,H0,c0,ap,f0p)
  CALL SUBFVS(r0,u0,H0,c0,am,f0m)
  CALL SUBFVS(r1,u1,H1,c1,ap,f1p)
  CALL SUBFVS(r1,u1,H1,c1,am,f1m)
  CALL SUBSD(i-1,q,if,r,u,H,c); CALL SUBFVS(r,u,H,c,ap,fap)
  CALL SUBSD(i+2,q,if,r,u,H,c); CALL SUBFVS(r,u,H,c,am,f2m)
  FORALL(j=1:3)f(i,j)=(-fap(j)+6.*f0p(j)+3.*f1p(j))/8.+(3.*f0m(j)+6.*f1m(j)-f2m(j))/8.
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXQ

! *****
SUBROUTINE SUBFVS(r,u,H,c,a,f)
DIMENSION a(3),f(3)
COMMON na,dt,dx,ak
  c1=(ak-1.)*r/ak; c2=r/(2.*ak)
  f(1)=c1*a(1)      +c2*a(2)      +c2*a(3)
  f(2)=c1*a(1)*u   +c2*a(2)*(u+c) +c2*a(3)*(u-c)
  f(3)=c1*a(1)*u*u/2.+c2*a(2)*(H+c*u)+c2*a(3)*(H-c*u)
ENDSUBROUTINE

! ***** Compute Riemann problem by flux difference splitting
SUBROUTINE CALFDS(q,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3), &
  u(0:if,3),uks(0:if,3),uk1(0:if,3),uk2(0:if,3),uk3(0:if,3), & !only use for RK
  q1(0:if,3),f1(0:if,3),ap(3),am(3),amat(3,3),rhs(300),c(300,-5:5) !only use for CNpcm
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
FORALL(i=0:if,j=1:3)u(i,j)=q(i,j)

IF(mode==41.OR.mode==42)THEN !CO scheme, 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUXCO(q,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk1(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk1(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXCO(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uks(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXCO(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk2(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk2(i,j)
  ENDFORALL
  CALL FLUXCO(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk3(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
    q(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+4.*uk2(i,j)+uk3(i,j))/6.
  ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==43.OR.mode==44)THEN !CO scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx
  FORALL(i=0:if,j=1:3)q1(i,j)=q(i,j)
  CALL FLUXCO(q,f,if,mode)

```

```

m=-1; 100 m=m+1
CALL FLUXCO(q1,f1,if,mode)
DO i=ib,ie
  CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
  CALL AAA(u,c,ap,am)
  CALL MATRIX(i,q,if,ap,amat)
  DO ii=1,3; DO jj=1,3
    c(3*i-3+ii,jj-ii-3)=-dxt*amat(ii,jj)
    c(3*i-3+ii,jj-ii )= dxt*amat(ii,jj)
  ENDDO; ENDDO
  CALL MATRIX(i,q,if,am,amat)
  DO ii=1,3; DO jj=1,3
    c(3*i-3+ii,jj-ii )=c(3*i-3+ii,jj-ii)-dxt*amat(ii,jj)
    c(3*i-3+ii,jj-ii+3)= dxt*amat(ii,jj)
  ENDDO; ENDDO
  DO j=1,3
    c(3*i-3+j,0)=c(3*i-3+j,0)+1.
    rhs(3*i-3+j)=-q1(i,j)-q(i,j)-dxt*(f(i,j)-f(i-1,j)+f1(i,j)-f1(i-1,j))
  ENDDO; ENDDO
  CALL GAUSSB(c,rhs,300,3*ib-2,3*ie,-5,5)
  FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q1(i,j)=q1(i,j)+rhs(3*i-3+j)
  IF(m<2) GOTO 100
  FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q(i,j)=q1(i,j)
ENDIF
END SUBROUTINE CALFDS

! ***** FLUXCO
SUBROUTINE FLUXCO(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ap(3),am(3),f0p(3),f1m(3),dfap(3),df0p(3),df0m(3),df1m(3)
b=2.
DO i=2,if-3
  CALL SUBSD(i ,q,if,r0,u0,H0,c0)
  CALL SUBSD(i+1,q,if,r1,u1,H1,c1)
  CALL AAA((u0+u1)/2.,(c0+c1)/2.,ap,am)
  CALL SUBFVS(r0,u0,H0,c0,ap,f0p)
  CALL SUBFVS(r1,u1,H1,c1,am,f1m)
  u=(u0+u1)/2.; H=(H0+H1)/2.; c=(c0+c1)/2.
  CALL SUBFDS(i-1,q,if,u,H,c,ap,dfap)
  CALL SUBFDS(i ,q,if,u,H,c,ap,df0p)
  CALL SUBFDS(i ,q,if,u,H,c,am,df0m)
  CALL SUBFDS(i+1,q,if,u,H,c,am,df1m)
  DO j=1,3
    IF(mode==41.OR.mode==43)THEN
      f(i,j)=f0p(j)+f1m(j)+AMINMOD(dfap(j),b*df0p(j))/6.+AMINMOD(df0p(j),b*dfap(j))/3. &
        -AMINMOD(df1m(j),b*df0m(j))/6.-AMINMOD(df0m(j),b*df1m(j))/3.
    ELSE
      f(i,j)=f0p(j)+f1m(j)+SUPERBEE(dfap(j),df0p(j))/2.-SUPERBEE(df1m(j),df0m(j))/2.
    ENDIF
  ENDDO; ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXCO

! ***** SUBFDS
SUBROUTINE SUBFDS(i,q,if,u,H,c,a,df)
DIMENSION q(0:if,3),dq(3),a(3),df(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
FORALL(j=1:3)dq(j)=q(i+1,j)-q(i,j)
aa=(a(2)-a(3))/2. ; ab=(a(2)+a(3))/2.-a(1)

```

```

dm=-u*dq(1)+dq(2) ; dp=ak1*(u*u/2.*dq(1)-u*dq(2)+dq(3))
c1=(aa/c*dp+ab*dm); c2=(aa/c*dm+ab/(c*c)*dp)
df(1)=a(1)*dq(1)      +c2
df(2)=a(1)*dq(2)+c1  +c2*u
df(3)=a(1)*dq(3)+c1*u+c2*H
ENDSUBROUTINE

! ***** Compute Riemann problem by finite volume method
SUBROUTINE CALFVM(q,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3), &
          u(0:if,3),uks(0:if,3),uk1(0:if,3),uk2(0:if,3),uk3(0:if,3), & !only use for RK
          q1(0:if,3),f1(0:if,3),ap(3),am(3),amat(3,3),rhs(300),c(300,-5:5) !only use for CNpcm
COMMON na,dt,dx,ak
FORALL(i=0:if,j=1:3)u(i,j)=q(i,j)

IF(mode==61)THEN !MUSCL, 2-step time integration
  CALL FLUXM(q,f,if,mode)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)u(i,j)=q(i,j)-dt/(2.*dx)*(f(i,j)-f(i-1,j))
  CALL FLUXM(u,f,if,mode)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)q(i,j)=q(i,j)-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
ENDIF

IF(mode==63.OR.mode==64)THEN !2nd-order Roe scheme
  CALL FLUXR2(q,f,if,mode)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)q(i,j)=q(i,j)-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
ENDIF

IF(mode==81.OR.mode==82)THEN !3rd-order FVM and 3rd-order Runge-Kutta
  CALL FLUX3(q,f,if,mode)
  FORALL(i=1:if-2,j=1:3)
    uk1(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk1(i,j)/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(u,f,if,mode)
  FORALL(i=1:if-2,j=1:3)
    uks(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(u,f,if,mode)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)
    uk2(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk2(i,j)
  ENDFORALL
  CALL FLUX3(u,f,if,mode)
  FORALL(i=2:if-2,j=1:3)
    uk3(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
    q(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+4.*uk2(i,j)+uk3(i,j))/6.
  ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==83.OR.mode==84)THEN !3rd-order FVM, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx
  FORALL(i=0:if,j=1:3)q1(i,j)=q(i,j)
  CALL FLUX3(q,f,if,mode)
  m=-1; 100 m=m+1
  CALL FLUX3(q1,f1,if,mode)
  DO i=ib,ie
    CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
    CALL AAA(u,c,ap,am)
    CALL MATRIX(i,q,if,ap,amat)
  
```

```

DO ii=1,3; DO jj=1,3
  c(3*i-3+ii,jj-ii-3)=-dxt*amat(ii,jj)
  c(3*i-3+ii,jj-ii )= dxt*amat(ii,jj)
ENDDO; ENDDO
CALL MATRIX(i,q,if,am,amat)
DO ii=1,3; DO jj=1,3
  c(3*i-3+ii,jj-ii )=c(3*i-3+ii,jj-ii)-dxt*amat(ii,jj)
  c(3*i-3+ii,jj-ii+3)= dxt*amat(ii,jj)
ENDDO; ENDDO
DO j=1,3
  c(3*i-3+j,0)=c(3*i-3+j,0)+1.
  rhs(3*i-3+j)=- (q1(i,j)-q(i,j))-dxt*(f(i,j)-f(i-1,j))+f1(i,j)-f1(i-1,j))
ENDDO; ENDDO
CALL GAUSSB(c,rhs,300,3*ib-2,3*ie,-5,5)
FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q1(i,j)=q1(i,j)+rhs(3*i-3+j)
IF(m<2) GOTO 100
FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q(i,j)=q1(i,j)
ENDIF
ENDSUBROUTINE CALFVM

! ***** FLUXM
SUBROUTINE FLUXM(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ql(3),qr(3),fl(3),fr(3),fi(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
DO i=1,if-2
  DO j=1,3
    dqa=q(i,j)-q(i-1,j); dq0=q(i+1,j)-q(i,j); dq1=q(i+2,j)-q(i+1,j)
    ql(j)=q(i ,j)+.5*AMINMOD(dqa,dq0)
    qr(j)=q(i+1,j)-.5*AMINMOD(dq0,dq1)
  ENDDO
  rl=q1(1); ul=q1(2)/rl; pl=ak1*(ql(3)-ql(2)*ul/2.)
  rr=qr(1); ur=qr(2)/rr; pr=ak1*(qr(3)-qr(2)*ur/2.)
  fl(1)=ql(2); fl(2)=ql(2)*ul+pl; fl(3)=(ql(3)+pl)*ul
  fr(1)=qr(2); fr(2)=qr(2)*ur+pr; fr(3)=(qr(3)+pr)*ur
  CALL ROEARS(rl,rr,ul,ur,pl,pr,fl,fr,fi)
  FORALL(j=1:3)f(i,j)=fi(j)
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXM

! ***** FLUXR2
SUBROUTINE FLUXR2(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ql(3),qr(3),fl(3),fr(3),fi(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
DO i=1,if-2
  DO j=1,3
    dqa=q(i,j)-q(i-1,j); dq0=q(i+1,j)-q(i,j); dq1=q(i+2,j)-q(i+1,j)
    IF(mode==63)THEN
      ql(j)=q(i ,j)+.5*AMINMOD(dqa,dq0)
      qr(j)=q(i+1,j)-.5*AMINMOD(dq0,dq1)
    ELSE
      ql(j)=q(i ,j)+.5*SUPERBEE(dqa,dq0)
      qr(j)=q(i+1,j)-.5*SUPERBEE(dq0,dq1)
    ENDIF
  ENDDO
  r=q(i,1); u=q(i,2)/r; uu=ak1*u*u/2.; p=ak1*q(i,3)-r*uu
  cc=ak*p/r; c=SQRT(cc); H=(cc+uu)/ak1
  rl=q1(1); ul=q1(2)/rl; pl=ak1*(ql(3)-ql(2)*ul/2.)

```



```

dr=2.*(r1-r); du=2.*(ul-u); dp=2.*(pl-p)
a1=u ; dw1=dr-dp/cc ; aw1=a1*dw1
a2=u+c; dw2=du+dp/(r*c) ; aw2=a2*dw2*r/(2.*c)
a3=u-c; dw3=du-dp/(r*c) ; aw3=a3*dw3*r/(2.*c)
ql(1)=ql(1)-dt/(2.*dx)*(aw1 +aw2 -aw3 )
ql(2)=ql(2)-dt/(2.*dx)*(aw1*u +aw2*(u+c) -aw3*(u-c) )
ql(3)=ql(3)-dt/(2.*dx)*(aw1*u*u/2.+aw2*(H+c*u)-aw3*(H-c*u))
r1=ql(1); ul=ql(2)/r1; pl=ak1*(ql(3)-ql(2)*ul/2.)
f1(1)=ql(2); f1(2)=ql(2)*ul+pl; f1(3)=(ql(3)+pl)*ul
r=q(i+1,1); u=q(i+1,2)/r; uu=ak1*u*u/2.; p=ak1*q(i+1,3)-r*uu
cc=ak*p/r; c=SQRT(cc); H=(cc+uu)/ak1
rr=qr(1); ur=qr(2)/rr; pr=ak1*(qr(3)-qr(2)*ur/2.)
dr=2.*(r-rr); du=2.*(u-ur); dp=2.*(p-pr)
a1=u ; dw1=dr-dp/cc ; aw1=a1*dw1
a2=u+c; dw2=du+dp/(r*c) ; aw2=a2*dw2*r/(2.*c)
a3=u-c; dw3=du-dp/(r*c) ; aw3=a3*dw3*r/(2.*c)
qr(1)=qr(1)-dt/(2.*dx)*(aw1 +aw2 -aw3 )
qr(2)=qr(2)-dt/(2.*dx)*(aw1*u +aw2*(u+c) -aw3*(u-c) )
qr(3)=qr(3)-dt/(2.*dx)*(aw1*u*u/2.+aw2*(H+c*u)-aw3*(H-c*u))
rr=qr(1); ur=qr(2)/rr; pr=ak1*(qr(3)-qr(2)*ur/2.)
fr(1)=qr(2); fr(2)=qr(2)*ur+pr; fr(3)=(qr(3)+pr)*ur
CALL ROEARS(r1,rr,ul,ur,pl,pr,f1,fr,fi)
FORALL(j=1:3)f(i,j)=fi(j)
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXR2

! ***** FLUX3
SUBROUTINE FLUX3(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ql(3),qr(3),fl(3),fr(3),fi(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
b=2.
DO i=1,if-2
DO j=1,3
dqa=q(i,j)-q(i-1,j); dq0=q(i+1,j)-q(i,j); dq1=q(i+2,j)-q(i+1,j)
IF(mode==81.OR.mode==83)THEN
ql(j)=q(i,j)+AMINMOD(dqa,b*dq0)/6.+AMINMOD(dq0,b*dqa)/3.
qr(j)=q(i+1,j)-AMINMOD(dq1,b*dq0)/6.-AMINMOD(dq0,b*dq1)/3.
ELSE
ql(j)=q(i,j)+SUPERBEE(dqa,dq0)/2.
qr(j)=q(i+1,j)-SUPERBEE(dq1,dq0)/2.
ENDIF
ENDIF
ENDDO
r1=ql(1); ul=ql(2)/r1; pl=ak1*(ql(3)-ql(2)*ul/2.)
rr=qr(1); ur=qr(2)/rr; pr=ak1*(qr(3)-qr(2)*ur/2.)
f1(1)=ql(2); f1(2)=ql(2)*ul+pl; f1(3)=(ql(3)+pl)*ul
fr(1)=qr(2); fr(2)=qr(2)*ur+pr; fr(3)=(qr(3)+pr)*ur
CALL ROEARS(r1,rr,ul,ur,pl,pr,f1,fr,fi)
FORALL(j=1:3)f(i,j)=fi(j)
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUX3

! ***** Roe's approximate Riemann solver
SUBROUTINE ROEARS(r1,rr,ul,ur,pl,pr,f1,fr,f)
DIMENSION fl(3),fr(3),f(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
br=SQRT(r1*rr); R=SQRT(rr/r1)
bu=(ul+R*ur)/(1.+R)

```

```

Hl=ak/ak1*pl/rl+ul*ul/2.
Hr=ak/ak1*pr/rr+ur*ur/2.
bH=(Hl+R*Hr)/(1.+R)
bcc=ak1*(bH-bu*bu/2.); bc=SQRT(bcc)
a1=ABS(bu) ; dw1=rr-rl-(pr-pl)/bcc ;aw1=a1*dw1
a2=ABS(bu+bc); dw2=ur-ul+(pr-pl)/(br*bc) ;aw2=a2*dw2*br/(2.*bc)
a3=ABS(bu-bc); dw3=ur-ul-(pr-pl)/(br*bc) ;aw3=a3*dw3*br/(2.*bc)
f(1)=(f1(1)+fr(1))/2.-(aw1 +aw2 -aw3 )/2.
f(2)=(f1(2)+fr(2))/2.-(aw1*bu +aw2*(bu+bc) -aw3*(bu-bc) )/2.
f(3)=(f1(3)+fr(3))/2.-(aw1*bu*bu/2.+aw2*(bH+bc*bu)-aw3*(bH-bc*bu))/2.
ENDSUBROUTINE ROEARS

! ***** Determine rho,u,H,c from q
SUBROUTINE SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
DIMENSION q(0:if,3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
r=q(i,1); u=q(i,2)/r; uu=ak1*u*u/2.; p=ak1*q(i,3)-r*uu
cc=ak*p/r; c=SQRT(cc); H=(cc+uu)/ak1
ENDSUBROUTINE

! ***** Splitted propagating velocities
SUBROUTINE AAA(u,c,ap,am)
DIMENSION ap(3),am(3)
a1=u ; ap(1)=(a1+ABS(a1))/2.; am(1)=(a1-ABS(a1))/2.
a2=u+c; ap(2)=(a2+ABS(a2))/2.; am(2)=(a2-ABS(a2))/2.
a3=u-c; ap(3)=(a3+ABS(a3))/2.; am(3)=(a3-ABS(a3))/2.
ENDSUBROUTINE

! ***** MATRIX, left hand side operators
SUBROUTINE MATRIX(i,q,if,a,amat)
DIMENSION q(0:if,3),a(3),amat(3,3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
aa=(a(2)-a(3))/2.; ab=(a(2)+a(3))/2.-a(1); ac=(a(2)+a(3))/2.
aM=u/c; phi=ak1*u*u/2.; psi=phi/(c*c)
amat(1,1)=a(1)- aM*aa+ psi*ab
amat(2,1)= (ak-3.)/2.*u*aM*aa+ u*(psi-1.)*ab
amat(3,1)= (phi-H)*aM*aa+u*u/2.*(psi-1.)*ab
amat(1,2)= 1./c*aa- ak1/c*aM*ab
amat(2,2)= ac+ (2.-ak)*aM*aa- 2.*psi*ab
amat(3,2)= (H-2.*phi)/c*aa- u*psi*ab
amat(1,3)= ak1/(c*c)*ab
amat(2,3)= ak1/c*aa+ ak1/c*aM*ab
amat(3,3)= ac+ ak1*aM*aa+ psi*ab
ENDSUBROUTINE

! ***** Gaussian elimination for linear eqns having a reduced array
SUBROUTINE GAUSSB(c,b,if,k1,k2,m1,m2)
DIMENSION c(if,m1:m2),b(if) !k1--k2, m1--m2: range of computation
DO k=k1,k2
b(k)=b(k)/c(k,0)
IF(k==k2)CYCLE
j2=MINO(m2,k2-k)
FORALL(j=1:j2)c(k,j)=c(k,j)/c(k,0)
i2=MINO(k2,k-m1)
DO i=k+1,i2; j0=k-i
b(i)=b(i)-c(i,j0)*b(k)

```

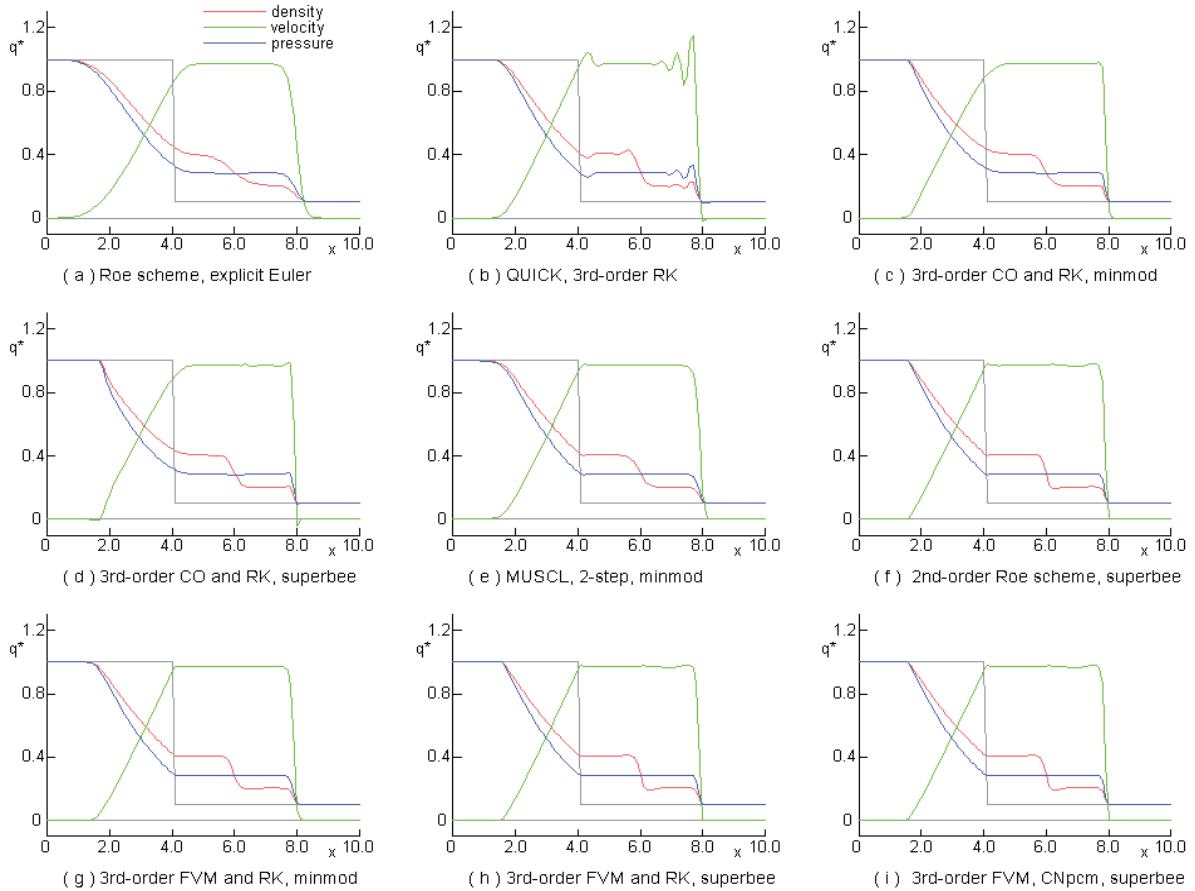


図 16.19: リーマン衝撃波管内の流れ $\Delta t = 0.0025$, $na_f = 800$

```

DO jk=1,j2; j=jk+k-i
  c(i,j)=c(i,j)-c(i,j0)*c(k,jk)
ENDDO; ENDDO
ENDDO
DO i=k2-1,k1,-1; j2=MIN0(m2,k2-i)
  DO j=1,j2; k=i+j
    b(i)=b(i)-c(i,j)*b(k)
  ENDDO; ENDDO
ENDSUBROUTINE GAUSSB
    
```

このプログラムは、前述のスカラ輸送方程式の初期値問題のプログラムをオイラー方程式に拡張したものである。サブルーチンは、流束ベクトル分離法、流束差分分離法、有限体積法の3群と、その補助サブルーチンからなる。CALFVSは流束ベクトル分離法に属する次の3解法のサブルーチンである。

- mode=11 Roe スキーム + Euler 前進法
- mode=21 QUICK スキーム + 3次 Runge-Kutta 法
- mode=22 QUICK スキーム + Crank-Nicholson 予測子修正子法

計算には 16.3 節の数値スキームと本節 1 項に示した時間積分法が用いられる。FLUXR は Roe スキームの数値流束を求めるサブルーチンで、既知の q_i から補助サブルーチン SUBSD を引用し ρ_i, u_i, H_i, c_i , また q_{i+1} から $\rho_{i+1}, u_{i+1}, H_{i+1}, c_{i+1}$, AAA を用い位相速度 $ap = \lambda_{i+1/2}^+$ と $am = \lambda_{i+1/2}^-$, SUBFVS を用い Steger-

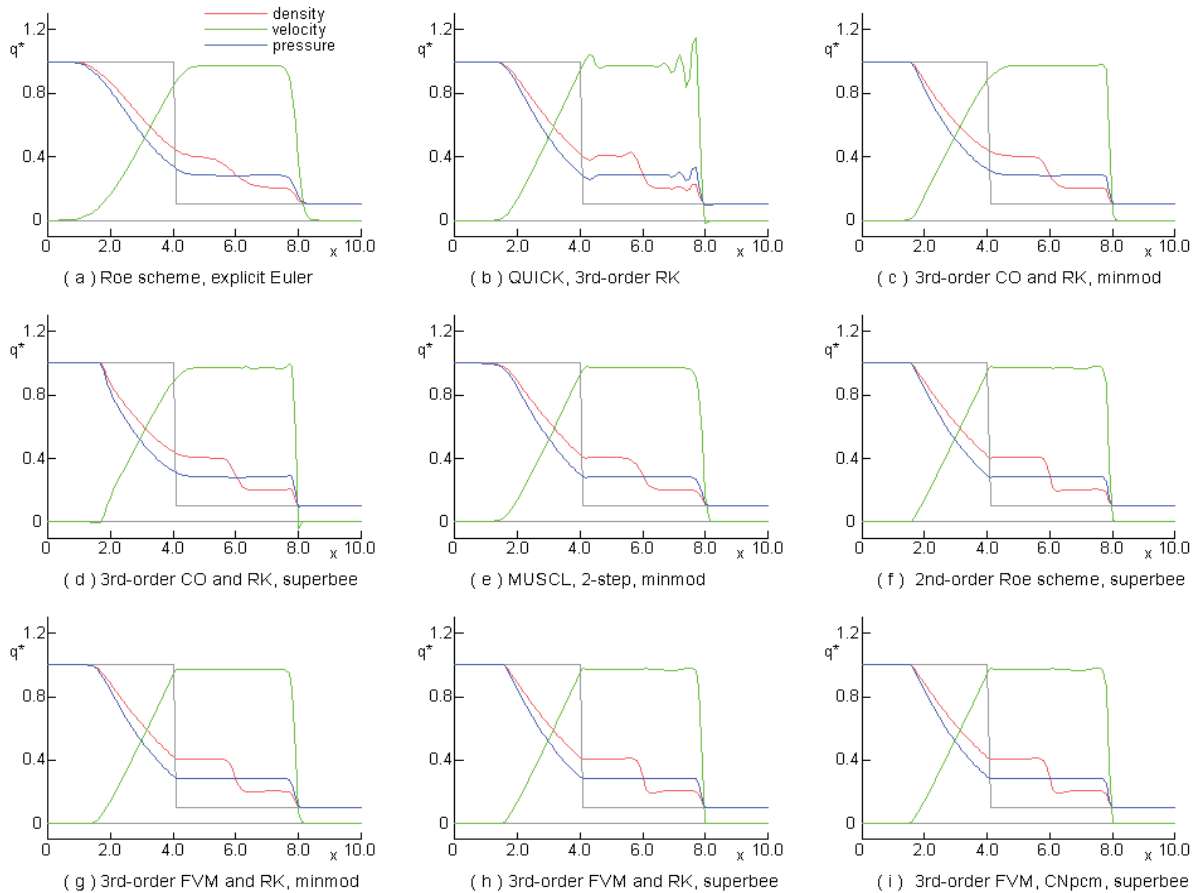


図 16.20: リーマン衝撃波管内の流れ $\Delta t = 0.01$, $na_f = 200$

Warming の流束ベクトル分離法の式 (16.33b) から流束 $f_p = F_i^+$, $f_m = F_{i+1}^-$, 数値流束 $f(i, j) = F_{i+1/2}$ の順に計算している. FLUXQ の QUICK スキームの数値流束の計算も同様に行われる. ただし流束 $f_{ap} = F_{i-1}^+$, $f_{0p} = F_i^+$, $f_{1p} = F_{i+1}^+$, $f_{0m} = F_i^-$, $f_{1m} = F_{i+1}^-$, $f_{2m} = F_{i+2}^-$ である.

ここで 16.6.1 項に述べた Crank-Nicholson 予測子修正子法のオイラー方程式への適用について述べる. 式 (16.109) はオイラー方程式では次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & -DA_i^+ \Delta q_{i-1}^{(m)} + (I + D|A_i|) \Delta q_i^{(m)} + DA_i^- \Delta q_{i+1}^{(m)} \\
 & = -(q_i^{(m-1)} - q_i^n) - D(F_{i+1/2}^n + F_{i+1/2}^{(m-1)} - F_{i-1/2}^n - F_{i-1/2}^{(m-1)}) \\
 & q^{(m)} = q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)}
 \end{aligned} \tag{16.113}$$

ただし $D = 0.5\Delta t/\Delta x$, I は単位行列である. この式は各計算点に対して成立するもので, その全体は $\Delta q_i^{(m)}$, ($i = i_b, i_b+1, i_b+2, \dots, i_e$) を未知変数とする連立 1 次方程式を構成し, その係数行列は次の 3×3 ブロック 3 重対角行列になる.

は Chakravarthy-Osher TVD スキームの数値流束を求めるもので，上記のようにして流束 $f_{0p} = F_i^+$ と $f_{1m} = F_{i+1}^-$ ，サブルーチン SUBFDS を用い式 (16.70b) から分離流束差分 $dfap = \Delta F_{i-1/2}^+$ ， $dfop = \Delta F_{i+1/2}^+$ ， $dfom = \Delta F_{i+1/2}^-$ ， $df1m = \Delta F_{i+3/2}^-$ ，式 (16.69) から数値流束 $f(i, j) = F_{i+1/2}$ の順に計算している．

CALFVM は有限体積法 (ゴドゥノフ型スキーム) に属する次の解法のサブルーチンである．

- mode=61 MUSCL 法 + 2 段階時間積分法
- mode=63,64 2 次 Roe スキーム
- mode=81,82 3 次有限体積法 TVD スキーム + 3 次 Runge-Kutta 法
- mode=83,84 3 次有限体積法 TVD スキーム + Crank-Nicholson 予測子修正子法

なお制限関数は mode=61,63,81,83 では minmod，mode=64,82,84 では superbee を用い，また数値流束はすべての解法で Roe の近似リーマン解から求めている．

プログラムの MUSCL 法は，その第 1 段階で数値流束 $\hat{F}_{i+1/2}^n$ を用い時間間隔 $\Delta t/2$ と置いてオイラー前進法で中間段階のセル平均値 $q_i^{n+1/2}$ を求め，その第 2 段階で時間平均数値流束 $\hat{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ を用い式 (16.93) からセル平均値 q_i^{n+1} を 2 次精度で求めるものである．サブルーチン FLUXM は MUSCL 法の数値流束を求めるもので，その中では区分的 1 次式 (16.91) からセル境界値 $q_l = q_{i+1/2L}$ と $q_r = q_{i+1/2R}$ ，サブルーチン ROEARS を引用し式 (16.86)–(16.89)(16.90c) から Roe の近似リーマン解 $f_i(j) = f(i, j) = \hat{F}_{i+1/2}$ の順に計算が行われる．なお $br = \bar{\rho}$ ， $R = \mathfrak{R}$ ， $bu = \bar{u}$ ， $bH = \bar{H}$ ， $bcc = \bar{c}^2$ ， $bc = \bar{c}$ ， $ak = |\bar{\lambda}_k|$ ， $dwk = \partial \bar{w}_k$ である．2 次 Roe スキームは MUSCL 法の大幅改良版で，サブルーチン FLUXR2 はその時間平均数値流束 $\hat{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ を求めるものである．その改良点は，区分的 1 次式 (16.91) の制限関数を minmod から superbee に換えたこと，中間段階の $q_l = q_{i+1/2L}^{n+1/2}$ ， $q_r = q_{i+1/2R}^{n+1/2}$ を Roe の波動分離法の式 (16.94) で計算したことである．3 次の有限体積法 TVD スキームでは，流束はサブルーチン FLUX3 から求め，また時間積分は 3 次 Chakravarthy-Osher TVD スキームと同じ要領で行っている．FLUX3 の中では，制限関数 minmod または superbee を用いた区分的 3 次式 (16.103) からセル境界値 $q_l = q_{i+1/2L}$ と $q_r = q_{i+1/2R}$ ，サブルーチン ROEARS を引用し Roe の近似リーマン解 $f(i, j) = \hat{F}_{i+1/2}$ の順に計算が行われる．

図 16.19 ~ 16.21 に，初期密度比 10:1，圧力比 10:1 のリーマン問題を解いた結果を示す．これらの図では時間ステップを $\Delta t = 0.0025, 0.01, 0.025$ に変えているが， $\Delta t = 0.04$ では計算不能になる．なお境界面の密度変化，衝撃波の諸量の変化は本来ステップ状になるべきものである．スキームの評価はスカラー輸送方程式の場合と同様にくだされる．

16.7 高次スキーム

境界面や滑り面などの弱い不連続の鋭い捕獲 (capturing) には, 4 次以上のスキームが必要である. 精度は 2 次ないしせいぜい 3 次あれば十分であるが, 弱い不連続を持続させるには 4 次以上の多項式の柔軟性が必要である. なお衝撃波はメッシュを細かくすることによりより鮮明に捕らえることができるが, 弱い不連続はメッシュを細かくするだけではだめである.

16.7.1 高次コンパクト TVD スキーム

始めに次式で与えられる 4 次上流差分と 4 次中心差分の線形結合を作る.

$$(f_x)_i = \frac{1}{12\Delta x}(-f_{i-3}^+ + 6f_{i-2}^+ - 18f_{i-1}^+ + 10f_i^+ + 3f_{i+1}^+ - 3f_{i-1}^- - 10f_i^- + 18f_{i+1}^- - 6f_{i+2}^- + f_{i+3}^-) - \frac{6}{5!}\Delta x^4 f^{(5)} \quad (16.114a)$$

$$(f_x)_i = \frac{1}{12\Delta x}(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}) + \frac{4}{5!}\Delta x^4 f^{(5)} \quad (16.114b)$$

これらの式から数値流束を求め, 次に 3 次上流差分 + 4 次補正項の形に書換えれば次式が得られる⁴¹.

$$\begin{aligned} h_{i+1/2}^{AUD} &= \frac{1}{12}(f_{i-2}^+ - 5f_{i-1}^+ + 13f_i^+ + 3f_{i+1}^+ + 3f_i^- - 13f_{i+1}^- - 5f_{i+2}^- + f_{i+3}^-) \\ &= h_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1}{6}\Delta f_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^+ - \frac{1}{12}\Delta^3 f_{i-1/2}^+ - \frac{1}{6}\Delta f_{i+3/2}^- - \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^- + \frac{1}{12}\Delta^3 f_{i+3/2}^-, \\ h_{i+1/2}^{ACD} &= \frac{1}{12}(-f_{i-1} + 7f_i + 7f_{i+1} - f_{i+2}) \\ &= h_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1}{6}\Delta f_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^+ - \frac{1}{12}\Delta^3 f_{i+1/2}^+ - \frac{1}{6}\Delta f_{i+3/2}^- - \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^- + \frac{1}{12}\Delta^3 f_{i+1/2}^- \end{aligned}$$

ただし $\Delta^3 f_{i+1/2} \equiv \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = -f_{i-1} + 3f_i - 3f_{i+1} + f_{i+2}$ である.

4 次上流差分と 4 次中心差分の線形結合を取れば, 次の一般的 4 次スキームの数値流束の式が得られる⁴².

$$\begin{aligned} h_{i+1/2}^{(4)} &= \frac{1-\phi}{2}h_{i+1/2}^{AUD} + \frac{1+\phi}{2}h_{i+1/2}^{ACD} \\ &= \underbrace{h_{i+1/2}^{Roe}}_{Roe \text{ スキーム}} + \underbrace{\frac{1}{6}\Delta f_{i-1/2}^+ - \frac{1-\phi}{24}\Delta^3 f_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^+ - \frac{1+\phi}{24}\Delta^3 f_{i+1/2}^+}_{4 \text{ 次上流差分の補正項}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{6}\Delta f_{i+3/2}^- + \frac{1-\phi}{24}\Delta^3 f_{i+3/2}^- - \frac{1}{3}\Delta f_{i+1/2}^- + \frac{1+\phi}{24}\Delta^3 f_{i+1/2}^-}_{4 \text{ 次中心差分の補正項}} \\ &\equiv h_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1}{6}Df_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3}Df_{i+1/2}^+ - \frac{1}{6}Df_{i+3/2}^- - \frac{1}{3}Df_{i+1/2}^- \end{aligned} \quad (16.115)$$

⁴¹ $a = a^+$ の場合の 4 次上流差分の部分の計算要領を下表に示す.

	乗数	f_{i-3}^+	f_{i-2}^+	f_{i-1}^+	f_i^+	f_{i+1}^+	
(16.114a)	$1/12\Delta x$	-1	6	-18	10	3	
$h_{i+1/2}^{AUD}$	1/12		1	-5	13	3	
$h_{i-1/2}^{AUD}$	1/12	-1	5	-13	-3		
$h_{i+1/2}^{AUD}$	1/12				12		$h_{i+1/2}^{Roe}$
	1/12			-2	2		
	1/12				-4	4	$\Delta f_{i+1/2}^+/3$
	1/12		1	-3	3	-1	$-\Delta^3 f_{i-1/2}^+/12$

⁴² Yamamoto, S. and Daiguji, H., Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Comput. & Fluids*, **22**(1993), 259-270.

この式は、 $\phi = -1$ ならば 4 次上流差分、 $\phi = 1$ ならば 4 次中心差分のものに、また式 (16.114) の打ち切り誤差は $-6(1-\phi)+4(1+\phi) = 0$ すなわち $\phi = 1/5$ のときに相殺され、この式は 5 次上流差分のものになる。

$\phi = 1/5$ の 5 次スキームの場合には、式 (16.115) から Df は次のように表される。

$$\begin{aligned} Df_{i+1/2}^{\pm} &= \Delta f_{i+1/2}^{\pm} - \frac{3}{20} \Delta^3 f_{i+1/2}^{\pm}, \\ Df_{j+1/2}^{\pm} &= \Delta f_{j+1/2}^{\pm} - \frac{1}{5} \Delta^3 f_{j+1/2}^{\pm} \quad (j = i \mp 1) \end{aligned} \quad (16.116)$$

また $\phi = 1/3$ の場合には、 $\frac{1-\phi}{24} : \frac{1+\phi}{24} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3}$ となり、 Df は 1 つの式で表すことができる。

$$Df_{j+1/2}^{\pm} = \Delta f_{j+1/2}^{\pm} - \frac{1}{6} \Delta^3 f_{j+1/2}^{\pm} \quad (j = i, i \pm 1) \quad (16.117)$$

式 (16.115) の精度は、数学的には $\phi = 1/5$ のときにのみ 5 次でそれ以外は 4 次であるが、実質的には ϕ の値によって突然変わることはないから、 $\phi = 1/3$ のときにも 5 次に近い結果が期待できよう。

次に上記の高次スキームの TVD 化について述べる。式 (16.63) にならって TVD 化すれば、とりあえず次の高次の TVD 差分スキームが得られる。

$$\begin{aligned} h_{i+1/2}^{(4)} &= h_{i+1/2}^{Roe} + \frac{1}{6} D\tilde{f}_{i-1/2}^+ + \frac{1}{3} D\tilde{f}_{i+1/2}^+ - \frac{1}{6} D\tilde{f}_{i+3/2}^- - \frac{1}{3} D\tilde{f}_{i+1/2}^- \\ D\tilde{f}_{j+1/2}^{\pm} &= \min\text{mod}(Df_{j+1/2}^{\pm}, bDf_{j-1/2}^{\pm}) \quad (j = i, i+1) \\ D\tilde{f}_{j+1/2}^{\pm} &= \min\text{mod}(Df_{j+1/2}^{\pm}, bDf_{j+3/2}^{\pm}) \quad (j = i-1, i) \end{aligned} \quad (16.118)$$

ただし補正勾配 Df は 5 次スキームの場合には

$$\begin{aligned} Df_{i+1/2}^{\pm} &= \Delta f_{i+1/2}^{\pm} - \frac{3}{20} \Delta^3 \bar{f}_{i+1/2}^{\pm}, \\ Df_{j+1/2}^{\pm} &= \Delta f_{j+1/2}^{\pm} - \frac{1}{5} \Delta^3 \bar{f}_{j+1/2}^{\pm} \quad (j = i \mp 1) \end{aligned} \quad (16.119)$$

また 4 次コンパクトスキームの場合には

$$Df_{j+1/2}^{\pm} = \Delta f_{j+1/2}^{\pm} - \frac{1}{6} \Delta^3 \bar{f}_{j+1/2}^{\pm} \quad (j = i, i \pm 1) \quad (16.120)$$

次にこの 4 次 TVD スキームの安定性について検討する。このスキームは 3 次上流差分スキームの勾配 Δf を補正勾配 Df に置換えたものであるが、このとき二つの条件 (16.66) と (16.67) はどうなるのであろうか。もう一つは、補正勾配 Df は Δf に比べ一般に大きい擾乱を含み、それに起因する不安定対策である。第 1 の点に関して、2 次 TVD スキームの式 (16.64) に相当の 4 次 TVD スキームの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i-1/2}^+ &= a_{i-1/2}^+ \left[1 + \frac{\mathfrak{C}}{6} \{R_a^+ \min\text{mod}(1, br_{i-1/2}^+) - \min\text{mod}(r_{i-1/2}^-, b)\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathfrak{C}}{3} \{R_a^+ \min\text{mod}(r_{i-1/2}^+, b) - \min\text{mod}(1, br_{i-1/2}^-)\} \right] \end{aligned} \quad (16.121a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i+1/2}^- &= a_{i+1/2}^- \left[1 + \frac{\mathfrak{C}}{6} \{R_a^- \min\text{mod}(1, br_{i+1/2}^-) - \min\text{mod}(r_{i+1/2}^+, b)\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathfrak{C}}{3} \{R_a^- \min\text{mod}(r_{i+1/2}^-, b) - \min\text{mod}(1, br_{i+1/2}^+)\} \right] \end{aligned} \quad (16.121b)$$

ただし $\mathfrak{C} = Du_{i-1/2}/\Delta u_{i-1/2}$, $R_a^+ = a_{i+1/2}^+/a_{i-1/2}^+$, $R_a^- = a_{i-1/2}^-/a_{i+1/2}^-$, $r_{i-1/2}^+ = Du_{i+1/2}/Du_{i-1/2}$, $r_{i-1/2}^- = Du_{i-3/2}/Du_{i-1/2}$ である。この式から倍率 b の条件は次のようになる。

$$0 < b \leq 6\mathfrak{C}^{-1} - 2 \quad (16.122)$$

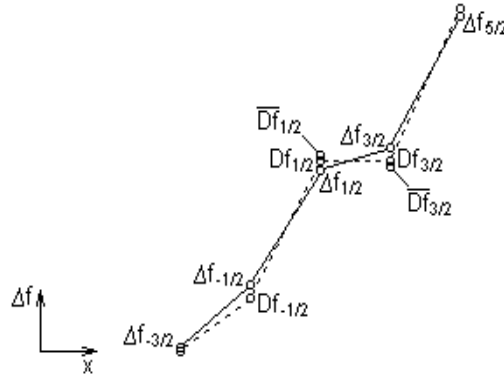


図 16.22: 勾配 Δf , 補正勾配 $\overline{Df} = \Delta f - \Delta^3 f/6$, 制限補正勾配 Df

また時間ステップ Δt の条件は次のようになる .

$$(1-\theta)b_1 C \leq 1, \quad b_1 = 1 + \frac{1}{6}cR_a(1+2b), \quad C = |a|\Delta t/\Delta x \quad (16.123)$$

なお b の上限に対しては $b_1 = 1 + 2R_a - cR_a/2$ となる .

第 2 の点に関しては, 補正勾配 $\overline{Df} \equiv \Delta f - \Delta^3 f/6$ は, 勾配 Δf に較べ大きい擾乱を含み不安定性を惹き起こす虞があるので, この勾配の補正項 $\Delta^3 f/6$ の大きさを制限する必要がある . 制限する方法はいろいろ考えられるが, ここでは勾配 $Df(x)$ に極値が生じないように制限することにする . 関数 $f(x)$ の極値は勾配 Δf の大きさを制限することによって除かれたが, 勾配 $Df(x)$ の極値も曲率 $\Delta^2 f$ の大きさを制限することによって除くことができる . この考えをもとに高次補正項を次のように置く⁴³ .

$$\begin{aligned} \Delta^3 \tilde{f}_{j+1/2}^\pm &= \Delta^2 \tilde{f}_{j+1}^\pm - \Delta^2 \tilde{f}_j^\pm & (j = i, i \pm 1) & \quad (16.124) \\ \Delta^2 \tilde{f}_k^\pm &= \text{minmod}(\Delta^2 f_k^\pm, b_2 \Delta^2 f_{k-1}^\pm), \\ \Delta^2 \tilde{f}_k^\pm &= \text{minmod}(\Delta^2 f_k^\pm, b_2 \Delta^2 f_{k+1}^\pm), \quad \Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1/2} - \Delta f_{k-1/2} \end{aligned}$$

minmod 関数の働きによって, 勾配補正項 $\Delta^3 \tilde{f}$ の付加による新たな勾配 $\partial f/\partial x$ の極値, 変曲点 $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$ の発生は確かに阻止される . もちろんこのとき, 3 次上流差分スキームで得られる変曲点は何らかの影響を受けるにせよ存在し続けるであろう . このことは 2 次 TVD スキームでもともとある極値が影響をうけても存続し続けるのと同じである .

次に minmod 関数の中で使われる倍率 b_2 の大きさを制限補正勾配 Df に極値が生じないように決定する . 制限補正勾配 Df は簡単のため $j = 0$ と置き, 曲率比 $R = \Delta^2 f_1/\Delta^2 f_0$ を用いれば次のようになる .

$$\begin{aligned} Df_{1/2} &= \Delta f_{1/2} - \frac{1}{6} \{ \text{minmod}(R, b_2) - \text{minmod}(1, b_2 R) \} \Delta^2 f_0 \\ &= \begin{cases} \Delta f_{1/2} - \frac{1}{6} (b_2 - 1) \Delta^2 f_0 & (R > b_2) & \text{第 1 の minmod 関数が働く} \\ \Delta f_{1/2} - \frac{1}{6} (R - 1) \Delta^2 f_0 & (1/b_2 \leq R \leq b_2) & \text{4 次上流差分} \\ \Delta f_{1/2} - \frac{1}{6} (1 - b_2) R \Delta^2 f_0 & (0 \leq R < 1/b_2) & \text{第 2 の minmod 関数が働く} \\ \Delta f_{1/2} & (R < 0) & \text{3 次上流差分: 第 1, 2 の minmod 関数が働く} \end{cases} \quad (16.125) \end{aligned}$$

⁴³ Daiguji, H., Yuan, X. and Yamamoto, S., Stabilization of higher-order high resolution schemes for the compressible Navier-Stokes equations, *Numer. Meth. Heat & Fluid Flow*, 7(1997), 250-274.

図 16.22 に 3 つの勾配，すなわち普通の意味での勾配 Δf ，補正勾配 \overline{Df} ，制限補正勾配 Df を示す．図中の直線の傾きは曲率を表し，変曲点は傾きが正から負またはその逆に変化するときを生ずる．したがって，制限補正勾配 Df の変曲点は

$$Df_{1/2} = \Delta f_{1/2} - \frac{1}{6}(1-b_2)\Delta^2 f_1 \leq \Delta f_{1/2} + \frac{1}{2}(\Delta f_{3/2} - \Delta f_{1/2})$$

$$Df_{3/2} = \Delta f_{3/2} - \frac{1}{6}(b_2-1)\Delta^2 f_1 \geq \Delta f_{3/2} - \frac{1}{2}(\Delta f_{3/2} - \Delta f_{1/2})$$

が成立すれば現れないことになる．これらの式から倍率 b_2 の上限は次のようになる．

$$\frac{1}{6}(b_2-1) \leq \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad 1 < b_2 \leq 4 \quad (16.126)$$

最後に，条件式 (16.122)，(16.123) における制限補正勾配 Df を無次元化した \mathfrak{C} について検討する（なお R_a は 16.4.3 項の考察により 1 と置くことにする）．倍率 b_2 の上限 4 を選べば，式 (16.125) から

$$\mathfrak{C} = \frac{Du_{1/2}}{\Delta u_{1/2}} = \frac{Df_{1/2}}{\Delta f_{1/2}} = \begin{cases} 1 - (1-r^-)/2 & (R > 4) \\ 1 - (r^+ - 2 + r^-)/6 & (1/4 \leq R \leq 4) \\ 1 + (r^+ - 1)/2 & (0 < R < 1/4) \\ 1 & (R \leq 0) \end{cases}$$

ただし $r^- = \Delta f_{-1/2}/\Delta f_{i+1/2}$ ， $r^+ = \Delta f_{3/2}/\Delta f_{i+1/2}$ ， $R = \Delta^2 f_1/\Delta^2 f_0 = (r^+ - 1)/(1 - r^-)$ である．これより \mathfrak{C} の大きさは

$$1/2 \leq \mathfrak{C} \leq 1 + 1/8 \quad (16.127)$$

となる⁴⁴．この \mathfrak{C} を用いれば，4 次コンパクト TVD スキームの倍率 b ， b_2 とクーラン数 C を制限する条件式は次のようになる．

$$0 < b \leq \frac{10}{3} \quad (\leq 4) \quad (16.128a)$$

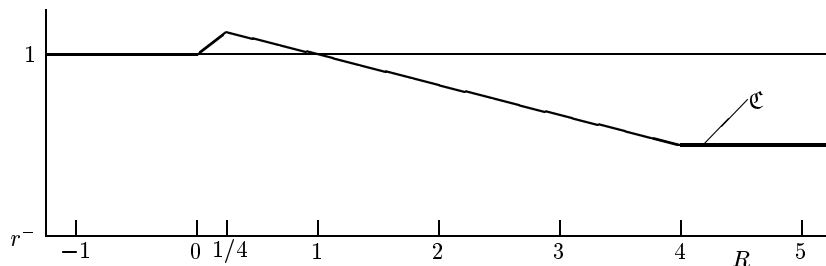
$$(1-\theta)b_1 C \leq 1, \quad b_1 = \frac{39}{16} \quad (= 2.5) \quad (16.128b)$$

$$b_2 = 4 \quad (16.128c)$$

なお括弧内の数字は 3 次 TVD 上流差分スキームで用いられているもので，これらをそのまま用いても経験上問題は無いようである．

最後に以上述べた 4 次コンパクト TVD スキームについてまとめれば，計算に必要な式は，式 (16.118)，(16.120)，(16.124) と (16.53) で， b ， b_1 ， b_2 の値は式 (16.128) によって制限される．この 4 次コンパクト TVD

⁴⁴ 本稿を執筆するに当たって，上式の意味が分からなくなったので歳の所為？ \mathfrak{C} の図を追加して説明する． $\Delta^2 f > 0$ の場合の \mathfrak{C} は下図に示すようになる． \mathfrak{C} の最大値は $R = 1/4$ の $1 + (1 - r^-)/8$ ，最小値は $R \geq 4$ の $1 - (1 - r^-)/2$ であるが，この高次スキームは $r^- \geq 0$ のときに意味をなし， $r^- = 0$ のときに \mathfrak{C} は上記の絶対的の最大最小値を取る． $\Delta^2 f < 0$ の場合にも対称性により同様のことが言え同じ結論が得られる．



スキームと 3 次の Chakravarthy-Osher TVD スキームの式は同形で，3 次スキームの勾配 Δf を制限補正勾配 Df で置換えれば 4 次コンパクト TVD スキームになる．最後に，このスキームで計算したときに変曲点はどうかという問に対しては，3 次 Chakravarthy-Osher TVD スキームの計算結果に現れる変曲点はほとんどそのままであろう．もし 3 次スキームでは捕らえられず，4 次スキームではじめて捕らえられるような変曲点があれば，そのような変曲点はこのスキームでは除かれてしまう．

これらのスカラー輸送方程式に対する高次コンパクト TVD スキームはほとんどそのままオイラー方程式にも適用できる．オイラー方程式への拡張については 16.4.4 項を参照されたい．

16.7.2 高次コンパクト有限体積法 TVD スキーム

これから述べる高次コンパクトスキームは，多次元に拡張したときに滑り面や境界面などの弱い不連続の捕獲に有効である．またカルマン渦列などの呆け防止にも役立つ．しかしながら衝撃波のより鮮明な捕獲という観点からは期待できない．前章の 16.5.4 項では式 (16.96) の右辺 3 項までを取り，2 次式で 3 次精度の再構成を行ったが，本項では右辺のすべての項を取り 4 次式で 5 次精度の再構成を行う．5 次精度を保つように，この式中のセル平均値 u'_i, u''_i, \dots を次の差分式で近似する．

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{1}{12\Delta x}(u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}) + O(\Delta x^4), \\ u''_i &= \frac{1}{12\Delta x^2}(-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}) + O(\Delta x^4), \\ u'''_i &= \frac{1}{2\Delta x^3}(-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}) + O(\Delta x^2), \\ u_i^{(4)} &= \frac{1}{\Delta x^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

これらの差分式を 1 階と 3 階の差分を用いて表せば

$$\begin{aligned} \Delta x u'_i &= \frac{1}{2}(\Delta u_{i-1/2} + \Delta u_{i+1/2}) + \frac{2}{4!}(-\Delta^3 u_{i-1/2} - \Delta^3 u_{i+1/2}) \\ \Delta x^2 u''_i &= (-\Delta u_{i-1/2} + \Delta u_{i+1/2}) + \frac{2}{4!}(\Delta^3 u_{i-1/2} - \Delta^3 u_{i+1/2}) \\ \Delta x^3 u'''_i &= \frac{1}{2}(\Delta^3 u_{i-1/2} + \Delta^3 u_{i+1/2}) \\ \Delta x^4 u_i^{(4)} &= (-\Delta^3 u_{i-1/2} + \Delta^3 u_{i+1/2}) \end{aligned}$$

これらの式を式 (16.96) に代入すれば，次の再構成段階の区分的 4 次式が得られる．

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u_i + \frac{1}{2}(\xi - \xi^2 + \frac{1}{12})\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{2}(\xi + \xi^2 - \frac{1}{12})\Delta u_{i+1/2} \\ &+ \frac{1}{4!}(-\xi^4 + 2\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi - \frac{9}{80})\Delta^3 u_{i-1/2} \\ &+ \frac{1}{4!}(\xi^4 + 2\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi + \frac{9}{80})\Delta^3 u_{i+1/2} + O(\Delta x^5) \quad (-1/2 \leq \xi \leq 1/2) \end{aligned}$$

セル境界 $\xi = \pm 1/2$ における変数値は上式より次のようになる．

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^L &= u_i + \frac{1}{6}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1}{30}\Delta^3 u_{i-1/2} - \frac{1}{20}\Delta^3 u_{i+1/2} + O(\Delta x^5) \\ u_{i-1/2}^R &= u_i - \frac{1}{6}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1}{3}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{30}\Delta^3 u_{i+1/2} + \frac{1}{20}\Delta^3 u_{i-1/2} + O(\Delta x^5) \end{aligned}$$

この5次精度の式は， $\Delta^4 u_i$ の大きさの項， $\{(1/5-\phi)/4!\}(\Delta^3 u_{i+1/2} - \Delta^3 u_{i-1/2})$ を加えれば，4次精度に落ちるが，前述の一般的な4次精度の数値流束の式と同形になる．すなわち

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{6}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{3}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1-\phi}{24}\Delta^3 u_{i-1/2} - \frac{1+\phi}{24}\Delta^3 u_{i+1/2} + O(\Delta x^4) \quad (16.129a)$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1}{6}\Delta u_{i+1/2} - \frac{1}{3}\Delta u_{i-1/2} + \frac{1-\phi}{24}\Delta^3 u_{i+1/2} + \frac{1+\phi}{24}\Delta^3 u_{i-1/2} + O(\Delta x^4) \quad (16.129b)$$

この式は形式的に次のように書くこともできる．

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{6}Du_{i-1/2} + \frac{1}{3}Du_{i+1/2} \quad (16.130a)$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1}{6}Du_{i+1/2} - \frac{1}{3}Du_{i-1/2} \quad (16.130b)$$

パラメータ $\phi = 1/5$ に選べば，再構成は5次精度の区分的4次式で行われることになる．また $\phi = 1/3$ に選べば，再構成は5次に近い4次精度に落ちるが， Du は1つの式に纏まり次のようになる．

$$Du_{i\pm 1/2} = \Delta u_{i\pm 1/2} - \frac{1}{6}\Delta^3 u_{i\pm 1/2} \quad (16.131)$$

上記の5次精度の区分的4次式は， ϕ を含む項の付加により，次の4次精度の区分的4次式になる．

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u_i + \frac{1}{2}(\xi - \xi^2 + \frac{1}{12})\Delta u_{i-1/2} + \frac{1}{2}(\xi + \xi^2 - \frac{1}{12})\Delta u_{i+1/2} \\ &+ \frac{1}{4!}(-\xi^4 + 2\xi^3 + \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi - \frac{5}{16} + \phi)\Delta^3 u_{i-1/2} \\ &+ \frac{1}{4!}(\xi^4 + 2\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{5}{2}\xi + \frac{5}{16} - \phi)\Delta^3 u_{i+1/2} + O(\Delta x^4) \quad (-1/2 \leq \xi \leq 1/2) \end{aligned} \quad (16.132)$$

そのセル中心の値は

$$u_i(x_i) = u_i - \frac{1}{4!}\Delta^2 u_i + \frac{1}{4!}(\frac{5}{16} - \phi)\Delta^4 u_i \quad (16.133)$$

またセル境界 $x_{i+1/2}$ における変数 u の跳躍量は

$$[u]_{i+1/2} = u_{i+1/2}^R - u_{i+1/2}^L = \frac{1}{4!}(1-\phi)\Delta^5 u_{i+1/2} \quad (16.134)$$

となる．もとの関数 $u(x)$ が適当に滑らかに変化するところではこの跳躍量 $[u]_{i+1/2}$ は無視できる．

セル境界における変数値の式 (16.129) は，4次コンパクトスキームの数値流束の式 (16.115) と形式的に全く同じであるから，その TVD スキームの式 (16.118)，(16.119)，(16.120)，(16.124) にならって次のように TVD 化することにする．

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{6}D\tilde{u}_{i-1/2} + \frac{1}{3}D\tilde{u}_{i+1/2}, \quad (16.135)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_{i+1} - \frac{1}{6}D\tilde{u}_{i+3/2} - \frac{1}{3}D\tilde{u}_{i+1/2}$$

$$D\tilde{u}_{j+1/2} = \min\text{mod}(Du_{j+1/2}, bDu_{j-1/2}) \quad (j = i, i+1)$$

$$D\tilde{u}_{j+1/2} = \min\text{mod}(Du_{j+1/2}, bDu_{j+3/2}) \quad (j = i-1, i)$$

ただし制限補正勾配 Du は5次の再構成の場合には

$$Du_{i+1/2} = \Delta u_{i+1/2} - \frac{3}{20}\Delta^3 \bar{u}_{i+1/2}, \quad (16.136)$$

$$Du_{j+1/2} = \Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{5}\Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} \quad (j = i \pm 1)$$

また 4 次のコンパクト再構成の場合には

$$Du_{j+1/2} = \Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{6} \Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} \quad (j = i, i \pm 1) \quad (16.137)$$

また高次補正項 $\Delta^3 \bar{u}$ は

$$\begin{aligned} \Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} &= \Delta^2 \tilde{u}_{j+1} - \Delta^2 \tilde{u}_j & (j = i, i \pm 1) & \quad (16.138) \\ \Delta^2 \tilde{u}_k &= \text{minmod}(\Delta^2 u_k, b_2 \Delta^2 u_{k-1}), \\ \Delta^2 \tilde{u}_k &= \text{minmod}(\Delta^2 u_k, b_2 \Delta^2 u_{k+1}), \quad \Delta^2 u_k = \Delta u_{k+1/2} - \Delta u_{k-1/2} \end{aligned}$$

以上述べた高次有限体積法 TVD スキームの TVD 安定性については、このスキームが前項に述べた高次の流束差分分離法 TVD スキームと類似していることより、全く同様に論じることができる。minmod 関数の中の倍率 b, b_2 、クーラン数 $C = a\Delta t/\Delta x$ の上限は、前記の条件式 (16.128) をそのまま用い求めることができる。4 次コンパクト TVD スキームの TVD 安定性は一応検討済みで、これらの条件式も検討の結果得られたものである。しかしながら、5 次 TVD スキームについては未完である。4 次コンパクト TVD スキームの TVD 安定条件が Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームのものとはあまり変わらないこと、4 次コンパクト TVD スキームと 5 次 TVD スキームの ϕ の値がそれぞれ $1/3$ と $1/5$ で、4 次上流差分スキームの -1 、4 次中心差分の 1 に対して近いところにあることを考えれば、4 次コンパクト TVD スキームのものをそのまま用いても大過ないものと思われる。なお衝撃波を含む流れでは 4 次コンパクト TVD スキームと 3 次 TVD スキームの計算結果はあまり変わらず、また弱い不連続を含む流れでは 4 次コンパクト TVD スキームの結果は 3 次 TVD スキームのものとはかなり違うが、5 次 TVD スキームのものとはほとんど同じになる。

これらの高次コンパクト有限体積法 TVD スキームのオイラー方程式への拡張については 16.5.4 項を参照されたい。

16.8 数値計算例 II

16.8.1 スカラー輸送方程式の初期値問題

このプログラムは 16.6.2 項のプログラムを基に作られる。すなわちそのメインプログラムと、サブルーチン CALFDS または CALFVM の中に下記のを追加し、同時にそれらの補助サブルーチンも追加し、冒頭部分に新たに用いる配列の宣言などを行う。

```
PROGRAM MAIN
zm(51)='4th YD and RK, minmod           ' !mode=51
zm(52)='4th YD and RK, superbee        ' !mode=52
zm(53)='4th YD, CNpcm, minmod         ' !mode=53
zm(54)='4th YD, CNpcm, superbee       ' !mode=54
zm(91)='4th FVM and RK, minmod        ' !mode=91
zm(92)='4th FVM and RK, superbee     ' !mode=92
zm(93)='4th FVM, CNpcm, minmod        ' !mode=93
zm(94)='4th FVM, CNpcm, superbee     ' !mode=94
! YD: Yamamoto-Daiguji scheme

! ***** Solve 1D scalar transport eq by flux difference splitting
SUBROUTINE CALFDS(x,u,is,if,mode,dc)

IF(mode==51.OR.mode==52)THEN !YD compact scheme, 4th-order Runge-Kutta
```

```

CALL FLUXYD(u,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk1(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk1(i)/2.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk2(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+(uk1(i)+uk2(i))/4.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uks(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)/2.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk3(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)
ENDFORALL
CALL FLUXYD(v,f,is,if,mode)
FORALL(i=is+3:if-3)
  uk4(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
  u(i)=u(i)+(uk1(i)+2.*uk2(i)+2.*uk3(i)+uk4(i))/6.
ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==53.OR.mode==54)THEN !YD compact scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=is+3; ie=if-3; dxt=dt*.5/dx; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
  FORALL(i=is:if)u1(i)=u(i)
  CALL FLUXYD(u,f,is,if,mode)
  m=-1; 110 m=m+1
  CALL FLUXYD(u1,f1,is,if,mode)
  DO i=ib,ie
    c(i,1)=-dxt*ap
    c(i,2)=1.+dxt*(ap-am)
    c(i,3)=dxt*am
    rhs(i)=-u1(i)-u(i)-dxt*(f(i)-f(i-1)+f1(i)-f1(i-1)) !right hand side
  ENDDO
  CALL GAUSS3(c,rhs,is,if,ib,ie)
  FORALL(i=ib:ie)u1(i)=u1(i)+rhs(i)
  IF(m<2) GOTO 110
  FORALL(i=ib:ie)u(i)=u1(i)
ENDIF
END SUBROUTINE CALFDS

! ***** FLUXYD
SUBROUTINE FLUXYD(u,f,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a
  b=2.; b2=2.; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
DO i=is+2,if-3
  dub=u(i-1)-u(i-2); dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i)
  du1=u(i+2)-u(i+1); du2=u(i+3)-u(i+2)
  d2ua=dua-dub; d2u0=du0-dua; d2u1=du1-du0; d2u2=du2-du1
  dua=dua-(AMINMOD(d2u0,b2*d2ua)-AMINMOD(d2ua,b2*d2u0))/6.
  du0=du0-(AMINMOD(d2u1,b2*d2u0)-AMINMOD(d2u0,b2*d2u1))/6.
  du1=du1-(AMINMOD(d2u2,b2*d2u1)-AMINMOD(d2u1,b2*d2u2))/6.
  IF(mode==51.OR.mode==53)THEN
    f(i)=ap*(u(i)+AMINMOD(dua,b*du0)/6.+AMINMOD(du0,b*dua)/3.) &
      +am*(u(i+1)-AMINMOD(du1,b*du0)/6.-AMINMOD(du0,b*du1)/3.)
  
```

```

ELSE
  f(i)=ap*(u(i)+SUPERBEE(dua,du0)/2.)+am*(u(i+1)-SUPERBEE(du1,du0)/2.)
ENDIF
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXYD

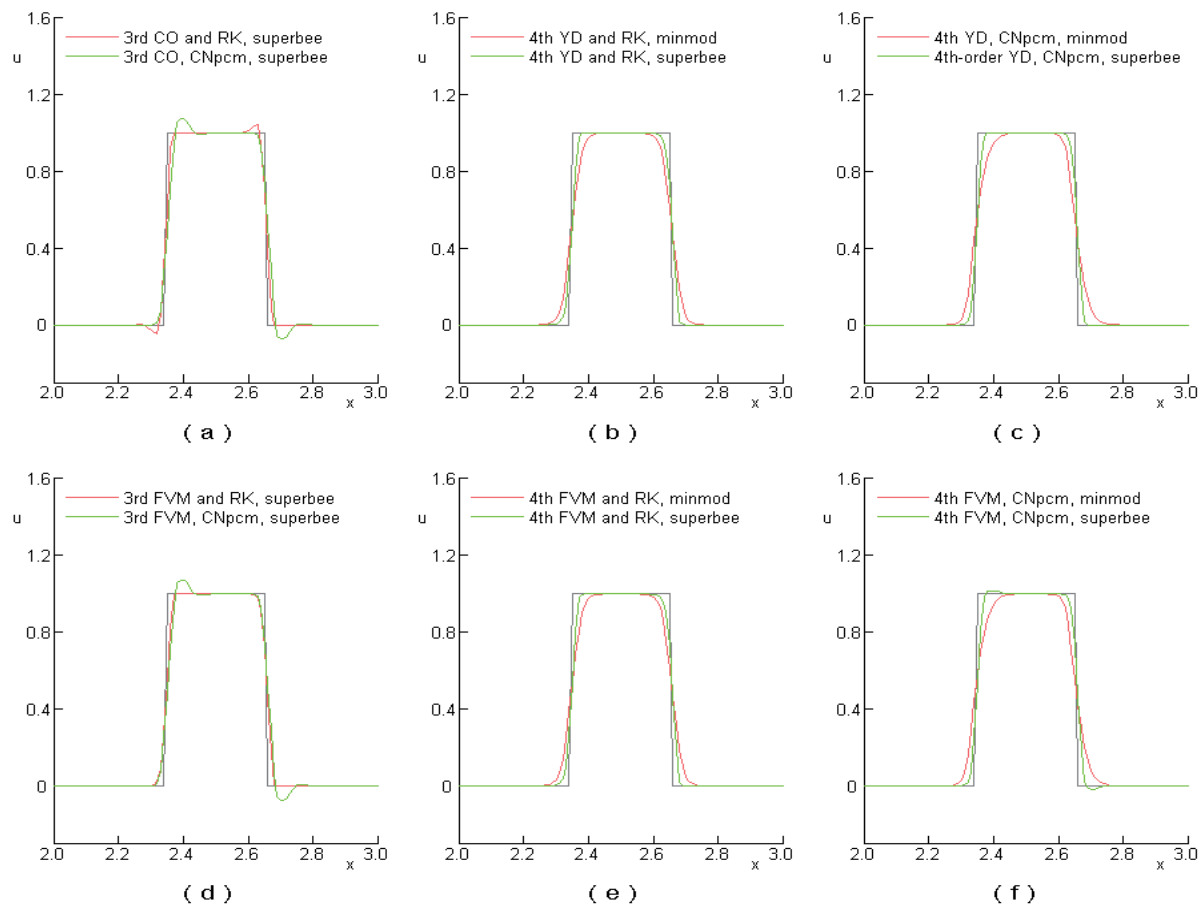
! ***** Solve 1D scalar transport eq by finite volume method
SUBROUTINE CALFVM(x,u,is,if,mode,dc)

IF(mode==91.OR.mode==92)THEN !4th-order compact FVM and 4th-order Runge-Kutta
  CALL FLUXC(u,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk1(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uk1(i)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk2(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+(uk1(i)+uk2(i))/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uks(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk3(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1)); v(i)=u(i)+uks(i)
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(v,f,is,if,mode)
  FORALL(i=is+3:if-3)
    uk4(i)=-dt/dx*(f(i)-f(i-1))
    u(i)=u(i)+(uk1(i)+2.*uk2(i)+2.*uk3(i)+uk4(i))/6.
  ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==93.OR.mode==94)THEN !4th-order compact FVM, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=is+3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx
  FORALL(i=is:if)u1(i)=u(i)
  CALL FLUXC(u,f,is,if,mode)
  m=-1; 110 m=m+1
  CALL FLUXC(u1,f1,is,if,mode)
  DO i=ib,ie
    ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.
    c(i,1)=-dxt*ap
    c(i,2)=1.+dxt*(ap-am)
    c(i,3)=dxt*am
    rhs(i)=-u1(i)-u(i)-dxt*(f(i)-f(i-1)+f1(i)-f1(i-1)) !right hand side
  ENDDO
  CALL GAUSS3(c,rhs,is,if,ib,ie)
  FORALL(i=ib:ie)u1(i)=u1(i)+rhs(i)
  IF(m<2) GOTO 110
  FORALL(i=ib:ie)u(i)=u1(i)
ENDIF
ENDSUBROUTINE CALFVM

! ***** FLUXC
SUBROUTINE FLUXC(u,f,is,if,mode)
DIMENSION u(is:if),f(is:if)
COMMON na,dt,dx,a; ap=(a+ABS(a))/2.; am=(a-ABS(a))/2.

```

図 16.23: 矩形波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 0.75$

```

b=2.; b2=2.
DO i=is+2,if-3
  dub=u(i-1)-u(i-2); dua=u(i)-u(i-1); du0=u(i+1)-u(i)
  du1=u(i+2)-u(i+1); du2=u(i+3)-u(i+2)
  d2ua=dua-dub; d2u0=du0-dua; d2u1=du1-du0; d2u2=du2-du1
  dua=dua-(AMINMOD(d2u0,b2*d2ua)-AMINMOD(d2ua,b2*d2u0))/6.
  du0=du0-(AMINMOD(d2u1,b2*d2u0)-AMINMOD(d2u0,b2*d2u1))/6.
  du1=du1-(AMINMOD(d2u2,b2*d2u1)-AMINMOD(d2u1,b2*d2u2))/6.
  IF(mode==91.OR.mode==93)THEN
    f(i)=ap*(u(i)+AMINMOD(dua,b*du0)/6.+AMINMOD(du0,b*dua)/3.) &
      +am*(u(i+1)-AMINMOD(du1,b*du0)/6.-AMINMOD(du0,b*du1)/3.)
  ELSE
    f(i)=ap*(u(i)+SUPERBEE(dua,du0)/2.)+am*(u(i+1)-SUPERBEE(du1,du0)/2.)
  ENDIF
ENDIF
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXC

```

図 16.23 に矩形波の場合，図 16.24 に帆船波の場合の上記プログラムによる計算結果を示す．またこれらの図には比較のために前記の 3 次スキームの計算結果も示してある．矩形波の場合に，制限関数 superbee は minmod 関数に比べ不連続を鋭く捕らえており，3 次の場合に見られた不連続前後の突起も小さくないしは完全に消失している．帆船波でも同様の傾向が見られるが，ピーク値は 3 次の場合に比べかなり低下し

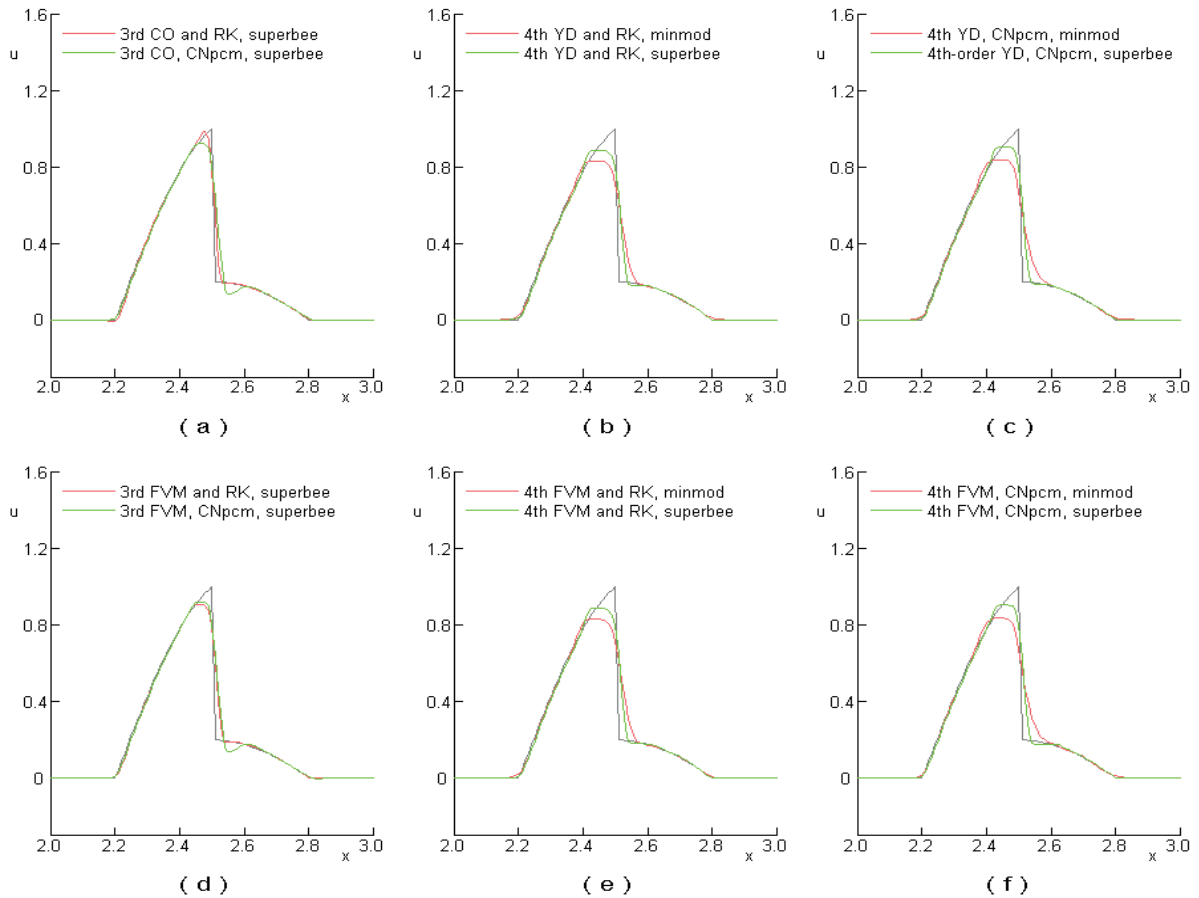


図 16.24: 帆船波 $a = 1$, $T = 2$, $CFL = 0.75$

ている．4次スキームは不連続を鋭く捕獲するという目的に適しているとは必ずしも言えない．

16.8.2 リーマン問題

以下に示すプログラムは，16.6.3項に示したメインプログラムとサブルーチン CALFDS または CALFVM の中に，またそれらの補助サブルーチンとして追加されるものである．

```
PROGRAM MAIN
zm(51)='4th YD and RK, minmod          ' !mode=51
:
zm(94)='4th FVM, CNpcm, superbee      ' !mode=94

! ***** Compute Riemann problem by flux difference splitting
SUBROUTINE CALFDS(q,if,mode)

IF(mode==51.OR.mode==52)THEN !YD compact scheme, 4th-order Runge-Kutta
CALL FLUXYD(q,f,if,mode)
FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
uk1(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk1(i,j)/2.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(u,f,if,mode)
```

```

FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uk2(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+uk2(i,j))/4.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(u,f,if,mode)
FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uks(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)/2.
ENDFORALL
CALL FLUXYD(u,f,if,mode)
FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uk3(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)
ENDFORALL
CALL FLUXYD(u,f,if,mode)
FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
  uk4(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
  q(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+2.*uk2(i,j)+2.*uk3(i,j)+uk4(i,j))/6.
ENDFORALL
ENDIF

IF(mode==53.OR.mode==54)THEN !YD compact scheme, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=3; ie=if-3; dxt=dt*.5/dx
  FORALL(i=0:if,j=1:3)q1(i,j)=q(i,j)
  CALL FLUXYD(q,f,if,mode)
  m=-1; 110 m=m+1
  CALL FLUXYD(q1,f1,if,mode)
  DO i=ib,ie
    CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
    CALL AAA(u,c,ap,am)
    CALL MATRIX(i,q,if,ap,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii-3)=-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii )= dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    CALL MATRIX(i,q,if,am,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii )=c(3*i-3+ii,jj-ii)-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii+3)= dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    DO j=1,3
      c(3*i-3+j,0)=c(3*i-3+j,0)+1.
      rhs(3*i-3+j)=- (q1(i,j)-q(i,j))-dxt*(f(i,j)-f(i-1,j))+f1(i,j)-f1(i-1,j))
    ENDDO; ENDDO
    CALL GAUSSB(c,rhs,300,3*ib-2,3*ie,-5,5)
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q1(i,j)=q1(i,j)+rhs(3*i-3+j)
    IF(m<3) GOTO 110
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q(i,j)=q1(i,j)
  ENDO
ENDIF
END SUBROUTINE CALFDS

! ***** FLUXYD
SUBROUTINE FLUXYD(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),ap(3),am(3),f0p(3),f1m(3), &
  dfbp(3),dfap(3),df0p(3),df1p(3),dfam(3),df0m(3),df1m(3),df2m(3), &
  d2fap(3),d2f0p(3),d2f1p(3),d2f0m(3),d2f1m(3),d2f2m(3)
b=2.; b2=2.
DO i=2,if-3
  CALL SUBSD(i ,q,if,r0,u0,H0,c0)
  CALL SUBSD(i+1,q,if,r1,u1,H1,c1)

```

```

CALL AAA((u0+u1)/2.,(c0+c1)/2.,ap,am)
CALL SUBFVS(r0,u0,H0,c0,ap,f0p)
CALL SUBFVS(r1,u1,H1,c1,am,f1m)
u=(u0+u1)/2.; H=(H0+H1)/2.; c=(c0+c1)/2.
CALL SUBFDS(i-2,q,if,u,H,c,ap,dfbp)
CALL SUBFDS(i-1,q,if,u,H,c,ap,dfap)
CALL SUBFDS(i,q,if,u,H,c,ap,df0p)
CALL SUBFDS(i+1,q,if,u,H,c,ap,df1p)
CALL SUBFDS(i-1,q,if,u,H,c,am,dfam)
CALL SUBFDS(i,q,if,u,H,c,am,df0m)
CALL SUBFDS(i+1,q,if,u,H,c,am,df1m)
CALL SUBFDS(i+2,q,if,u,H,c,am,df2m)
FORALL(j=1:3)
  d2fap(j)=dfap(j)-dfbp(j); d2f0p(j)=df0p(j)-dfap(j); d2f1p(j)=df1p(j)-df0p(j)
  d2f0m(j)=df0m(j)-dfam(j); d2f1m(j)=df1m(j)-df0m(j); d2f2m(j)=df2m(j)-df1m(j)
ENDFORALL
DO j=1,3
  dfap(j)=dfap(j)-(AMINMOD(d2f0p(j),b2*d2fap(j))-AMINMOD(d2fap(j),b2*d2f0p(j)))/6.
  df0p(j)=df0p(j)-(AMINMOD(d2f1p(j),b2*d2f0p(j))-AMINMOD(d2f0p(j),b2*d2f1p(j)))/6.
  df0m(j)=df0m(j)-(AMINMOD(d2f1m(j),b2*d2f0m(j))-AMINMOD(d2f0m(j),b2*d2f1m(j)))/6.
  df1m(j)=df1m(j)-(AMINMOD(d2f2m(j),b2*d2f1m(j))-AMINMOD(d2f1m(j),b2*d2f2m(j)))/6.
  IF(mode==51.OR.mode==53)THEN
    f(i,j)=f0p(j)+f1m(j)+AMINMOD(dfap(j),b*df0p(j))/6.+AMINMOD(df0p(j),b*dfap(j))/3. &
      -AMINMOD(df1m(j),b*df0m(j))/6.-AMINMOD(df0m(j),b*df1m(j))/3.
  ELSE
    f(i,j)=f0p(j)+f1m(j)+SUPERBEE(dfap(j),df0p(j))/2.-SUPERBEE(df1m(j),df0m(j))/2.
  ENDIF
ENDDO; ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXYD

! ***** Compute Riemann problem by finite volume method
SUBROUTINE CALFVM(q,if,mode)

IF(mode==91.OR.mode==92)THEN !4th-order compact FVM and 4th-order Runge-Kutta
  CALL FLUXC(q,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk1(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uk1(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk2(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+uk2(i,j))/4.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uks(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)/2.
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk3(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j)); u(i,j)=q(i,j)+uks(i,j)
  ENDFORALL
  CALL FLUXC(u,f,if,mode)
  FORALL(i=3:if-3,j=1:3)
    uk4(i,j)=-dt/dx*(f(i,j)-f(i-1,j))
    q(i,j)=q(i,j)+(uk1(i,j)+2.*uk2(i,j)+2.*uk3(i,j)+uk4(i,j))/6.
  ENDFORALL
ENDIF

```

```

IF(mode==93.OR.mode==94)THEN !4th-order compact FVM, Crank-Nicholson predictor-corrector method
  ib=3; ie=if-3; dxt=.5*dt/dx
  FORALL(i=0:if,j=1:3)q1(i,j)=q(i,j)
  CALL FLUXC(q,f,if,mode)
  m=-1; 110 m=m+1
  CALL FLUXC(q1,f1,if,mode)
  DO i=ib,ie
    CALL SUBSD(i,q,if,r,u,H,c)
    CALL AAA(u,c,ap,am)
    CALL MATRIX(i,q,if,ap,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii-3)=-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii)=dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    CALL MATRIX(i,q,if,am,amat)
    DO ii=1,3; DO jj=1,3
      c(3*i-3+ii,jj-ii)=c(3*i-3+ii,jj-ii)-dxt*amat(ii,jj)
      c(3*i-3+ii,jj-ii+3)=dxt*amat(ii,jj)
    ENDDO; ENDDO
    DO j=1,3
      c(3*i-3+j,0)=c(3*i-3+j,0)+1.
      rhs(3*i-3+j)=- (q1(i,j)-q(i,j))-dxt*(f(i,j)-f(i-1,j))+f1(i,j)-f1(i-1,j))
    ENDDO; ENDDO
    CALL GAUSSB(c,rhs,300,3*ib-2,3*ie,-5,5)
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q1(i,j)=q1(i,j)+rhs(3*i-3+j)
    IF(m<3) GOTO 110
    FORALL(i=ib:ie,j=1:3)q(i,j)=q1(i,j)
  ENDF
ENDSUBROUTINE CALFVM

! ***** FLUXC
SUBROUTINE FLUXC(q,f,if,mode)
DIMENSION q(0:if,3),f(0:if,3),q1(3),qr(3),f1(3),fr(3),fi(3)
COMMON na,dt,dx,ak; ak1=ak-1.
b=2.; b2=2.
DO i=2,if-3
  DO j=1,3
    dqb=q(i-1,j)-q(i-2,j); dqa=q(i,j)-q(i-1,j); dq0=q(i+1,j)-q(i,j)
    dq1=q(i+2,j)-q(i+1,j); dq2=q(i+3,j)-q(i+2,j)
    d2qa=dqa-dqb; d2q0=dq0-dqa; d2q1=dq1-dq0; d2q2=dq2-dq1
    dqa=dqa-(AMINMOD(d2q0,b2*d2qa)-AMINMOD(d2qa,b2*d2q0))/6.
    dq0=dq0-(AMINMOD(d2q1,b2*d2q0)-AMINMOD(d2q0,b2*d2q1))/6.
    dq1=dq1-(AMINMOD(d2q2,b2*d2q1)-AMINMOD(d2q1,b2*d2q2))/6.
    IF(mode==91.OR.mode==93)THEN
      q1(j)=q(i,j)+AMINMOD(dqa,dq0)/6.+AMINMOD(dq0,dqa)/3.
      qr(j)=q(i+1,j)-AMINMOD(dq1,dq0)/6.-AMINMOD(dq0,dq1)/3.
    ELSE
      q1(j)=q(i,j)+SUPERBEE(dqa,dq0)/2.
      qr(j)=q(i+1,j)-SUPERBEE(dq1,dq0)/2.
    ENDF
  ENDDO
  r1=q1(1); u1=q1(2)/r1; p1=ak1*(q1(3)-q1(2)*u1/2.)
  rr=qr(1); ur=qr(2)/rr; pr=ak1*(qr(3)-qr(2)*ur/2.)
  f1(1)=q1(2); f1(2)=q1(2)*u1+p1; f1(3)=(q1(3)+p1)*u1
  fr(1)=qr(2); fr(2)=qr(2)*ur+pr; fr(3)=(qr(3)+pr)*ur
  CALL ROEARS(r1,rr,u1,ur,p1,pr,f1,fr,fi)
  FORALL(j=1:3)f(i,j)=fi(j)

```

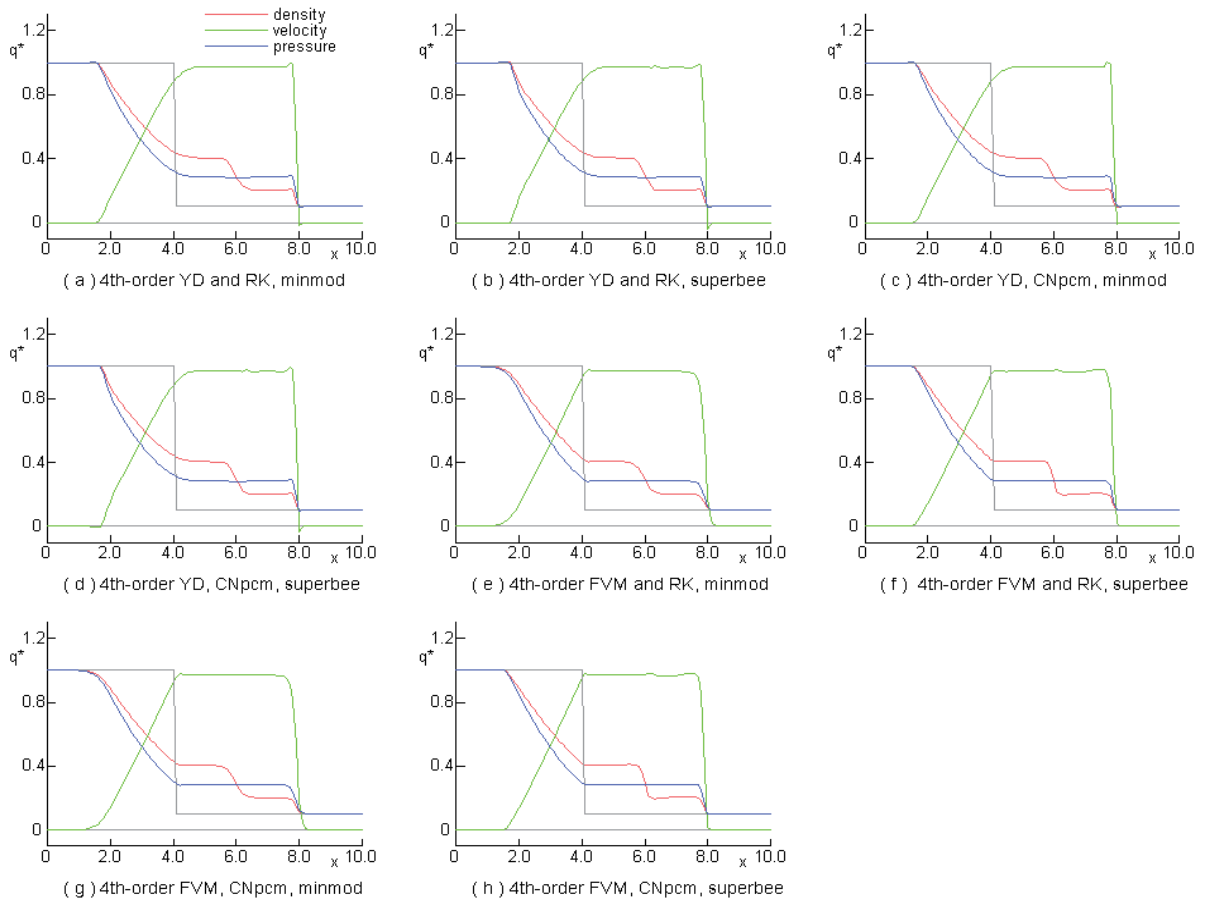


図 16.25: リーマン衝撃波管内の流れ $\Delta t = 0.01$, $na_f = 200$

```
ENDDO
ENDSUBROUTINE FLUXC
```

上記のプログラムによるリーマン問題の計算結果を図 16.25 に示す。3 次スキームの場合と同様に制限関数 superbee を用いた有限体積法が良い結果を示すが、3 次スキームよりも特にすぐれているということではない。

付録1 Roeの波動分離法

ここで Roe の波動分離法 (fluctuation splitting)⁴⁵ について説明する．この方法ではヤコビ行列 A を特性速度の符号にしたがって

$$A = A^+ + A^-, \quad A^\pm = RA^\pm L \quad (16.139)$$

のように分離し，流束の差分を次のように置く．

$$F^{n+1} - F^n = \Delta F = A^+ \Delta q + A^- \Delta q \quad (16.140)$$

この式の右辺第1項は x の正の方向へ伝播する波，第2項は負の方向へ伝播する波を表している．1次元オイラー方程式は，この式に対し1次上流差分を取れば，その差分方程式は次のようになる．

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (A^+ \Delta q)_{i-1/2}^n + (A^- \Delta q)_{i+1/2}^n \} \quad (16.141)$$

ただし $\Delta q_{j+1/2} = q_{j+1} - q_j$ である．

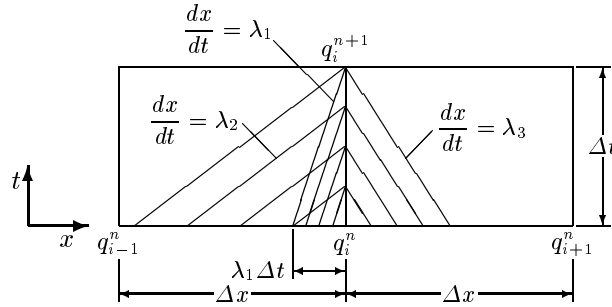


図 16.26: Roe の波動分離法

式 (16.141) は次のように解釈できる．いま $L\Delta q = \Delta w$ と置けば，

$$q_i^{n+1} - q_i^n = (\Delta q)_i^{n+1/2} = (R\Delta w)_i^{n+1/2} = \sum_k (\Delta w_k r_k)_i^{n+1/2}, \quad (16.142a)$$

$$\begin{aligned} (A^+ \Delta q)_{i-1/2}^n + (A^- \Delta q)_{i+1/2}^n &= (RA^+ \Delta w)_{i-1/2}^n + (RA^- \Delta w)_{i+1/2}^n \\ &= \sum_k (\lambda_k^+ \Delta w_k r_k)_{i-1/2}^n + \sum_k (\lambda_k^- \Delta w_k r_k)_{i+1/2}^n \end{aligned} \quad (16.142b)$$

となる．図 16.26 を参照すれば，変数 q_i^n が q_i^{n+1} に変化するのは， Δt 時間内に 3 つの波 $\Delta w_k r_k$ ($k = 1, 2, 3$) が点 x_i を通過したことによる．その内 第 1 の波 $(\Delta w_1 r_1)_i^{n+1/2}$ は，図では右方へ伝播する波で，この波は時間 t^n に図の区間 Δx を通過した波 $(\Delta w_1 r_1)_{i-1/2}^n$ の内 区間 $\lambda_1 \Delta t$ を通過した波である．したがって $(\Delta w_1 r_1)_i^{n+1/2} = (\Delta w_1 r_1)_{i-1/2}^n \lambda_1 \Delta t / \Delta x$ となる．ほかの波についても同様でこれらをまとめて書けば

$$\sum_k (\Delta w_k r_k)_i^{n+1/2} = - \sum_k \left(\frac{\lambda_k^+ \Delta t}{\Delta x} \Delta w_k r_k \right)_{i-1/2}^n - \sum_k \left(\frac{\lambda_k^- \Delta t}{\Delta x} \Delta w_k r_k \right)_{i+1/2}^n$$

すなわち式 (16.141) になる．

⁴⁵Roe, P. L., Fluctuations and signals, a framework for numerical evolution problems, *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 219-257, 1982.

付録2 特性曲線法とリーマン問題の解

ここでは特性曲線法 (method of characteristics, characteristic method) によりリーマン問題を正確に解く。はじめに特性曲線法の概要について Hoskin の解説に沿って述べる⁴⁶。圧縮性流体の1次元非定常流れ問題は、この章の始めに詳しく述べたように質量・運動量・エネルギーの保存方程式、状態方程式、初期・境界条件からなる Cauchy 問題で、準線形で、不連続を含む。拡散を無視すれば、支配方程式は実特性を持つ双曲型になり、特性方向の内微分のみで常微分方程式系になる。特性曲線法ではこの方程式系を特性曲線のメッシュ上で解く。この解法の特徴は、特異性 (例えば膨張扇) を正確に扱えること、不連続が特性に沿って拡散せずに伝播、メッシュ粗く取ることができ計算時間小、不連続の数が増すとプログラムが急激に煩雑になることである。

流れの方程式

ラグランジュ空間 (r, t) を考える。流体粒子の流脈線はこの空間内では $r = \text{const.}$ 、質量・運動量・エネルギーの保存方程式は⁴⁷

$$v_t - \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha u_r = \frac{\alpha uv}{R} \tag{16.143a}$$

$$u_t + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha p_r = 0 \tag{16.143b}$$

$$Ts_t = \epsilon_t + pv_t = 0 \tag{16.143c}$$

また

$$\begin{aligned} R_t &= u \\ p &= p(v, \epsilon) \end{aligned} \tag{16.144}$$

ただし r はラグランジュ座標、 R はオイラー座標、 $\partial/\partial t$ はオイラー座標系の実質微分 (substantial derivative) に相当の演算子である。 $v = \rho_0/\rho$ 、平面、円柱、球面流れに対しそれぞれ $\alpha = 0, 1, 2$ 、また u は流速、 ρ, p, T, s, ϵ はそれぞれ密度、静圧、静温度、比エントロピー、比内部エネルギーである。

次に特性曲線に沿って伝播する圧力波の式を示す。

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_r = \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)_r \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_r = -\frac{v^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_r = -\frac{v^2}{\rho_0} \frac{p_t}{v_t}$$

⁴⁶ Hoskin, N.E., Solution by characteristics of the equations of one-dimensional unsteady flow, Methods in Computational Physics, ed. Alder, B., Fernbach, S., Rotenberg, M., Vol.3 Fundamental Methods in Hydrodynamics, pp.265-93,1964, Academic Press.

⁴⁷ 任意関数を $f(t, R(t, r))$ とすれば、

$$f_t = f_{tR} + R_t f_R = f_{tR} + u f_R$$

ただし f_{tR} はオイラー座標系における時間微分である。

面積比は R_r 、体積比は $(R/r)^\alpha R_r = \rho_0/\rho = v$ 、質量保存の式は $(\rho v)_t = 0$ すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha R_r \right\} = \rho_t \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha R_r + \rho \frac{\alpha u}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha R_r + \rho \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha u_r = \rho_t v + \rho \frac{\alpha uv}{R} + \rho \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha u_r = 0$$

これより式 (16.143a) が導かれる。

また運動量保存の式は

$$u_t = -\frac{1}{\rho} p_R = -\frac{1}{\rho} \frac{p_r}{R_r} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha p_r$$

これより式 (16.143b) が導かれる。なおこれらの式の導出には体積比の関係が随所に用いられた。

ただし下添え字の r は $r = \text{const.}$ を意味し, この式の微分は同一流体粒子すなわち熱力学システムの状態の時間変化を示している. $\frac{c}{v} \times (16.143a)$ に上式の関係を用いれば,

$$\frac{1}{\rho c} p_t + \frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha u_r = -\frac{\alpha u c}{R} \quad (16.145)$$

圧力波の伝播の式は (16.145) \pm (16.143b) となり

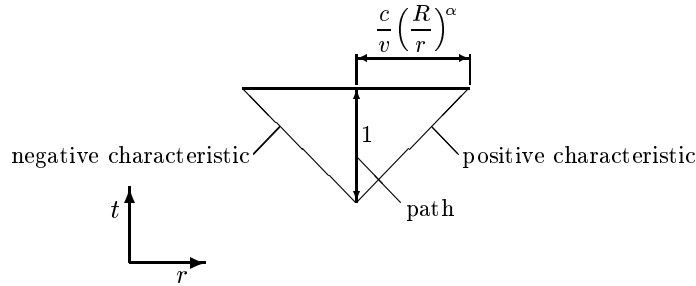
$$\frac{1}{\rho c} \left\{ p_t \pm \frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha p_r \right\} \pm \left\{ u_t \pm \frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha u_r \right\} = -\frac{\alpha u c}{R} \quad (16.146a)$$

あるいは $\partial/\partial t \pm (c/v)(R/r)^\alpha \partial/\partial r = d/dt$ と置けば

$$\frac{1}{\rho c} dp \pm du + \frac{\alpha u c}{R} dt = 0 \quad \left(dr = \pm \frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha dt \text{ に沿って} \right) \quad (16.146b)$$

またエントロピー波の伝播の式は式 (16.143c) から

$$ds = d\epsilon + p dv = 0 \quad (dr = 0 \text{ に沿って}) \quad (16.147)$$



次に不連続の条件について述べる. 物質間の境界面 (interface), 自由表面などの接触不連続面 (contact surface) は p, u が連続, ρ, ϵ, s が不連続の流脈線である.

$$dR = u dt, \quad dr = 0 \quad (16.148)$$

次に衝撃波は, その伝播速度を U とすれば

$$dR = U dt \quad (16.149)$$

で表され, ここではすべての変数が不連続になり次の Rankine-Hugoniot の関係が成立する⁴⁸.

$$(u_1 - u_0)^2 = (p_1 - p_0)(v_0 - v_1) \quad (16.150a)$$

$$U = (v_0 u_1 - v_1 u_0) / (v_0 - v_1) \quad (16.150b)$$

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0)(v_0 - v_1) \quad (16.150c)$$

$$p_1 = p_1(v_1, \epsilon_1) \quad (16.150d)$$

ただし添え字の 0 は衝撃波の前方, 1 は後方とする. 衝撃波前方の $u_0, p_0, v_0, \epsilon_0$ を既知とすれば, 上の 4 式の未知変数は $u_1, p_1, v_1, \epsilon_1, U$ の 5 個になる. 今 後方の流速 u_1 の値を指定すれば残りの変数の値は決定

⁴⁸ これらの式は Rankine-Hugoniot の式 (16.58) から導かれる. すなわち (a) 式は $[\rho][\rho u^2 + p] = [\rho u]^2$ から, (b) 式は $U = [\rho u] / [\rho]$ から導かれる. また (c) 式は $[\rho][(e+p)u] = [\rho u][e]$ に (a) 式を考慮して導かれる.

できる．その計算手順は， v_1 の予測値を (a) 式に入れ p_1 を決定，(d) 式から ϵ_1 を決定，(c) 式により v_1 の値を修正，以上を反復，収束後に U, c_1 を決定するというものである．

この項の終わりに，衝撃波などの不連続はないものとして特性格子の形成と解の延長について述べる．点 A, B の解が既知のときに点 D の解は式 (16.146b)(16.147) から得られる次の差分式から求められる．

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_a (p_D - p_A) + u_D - u_A + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_a (t_D - t_A) = 0 \quad (16.151a)$$

$$r_D - r_A - \left[\frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha\right]_a (t_D - t_A) = 0 \quad (16.151b)$$

$$\left[\frac{1}{\rho c}\right]_b (p_D - p_B) - u_D + u_B + \left[\frac{\alpha u c}{R}\right]_b (t_D - t_B) = 0 \quad (16.151c)$$

$$r_D - r_B + \left[\frac{c}{v} \left(\frac{R}{r}\right)^\alpha\right]_b (t_D - t_B) = 0 \quad (16.151d)$$

$$R_D - R_A - [u+c]_a (t_D - t_A) = 0 \quad (16.151e)$$

$$R_D - R_B - [u-c]_b (t_D - t_B) = 0 \quad (16.151f)$$

$$\epsilon_D - \epsilon_F + \frac{1}{2} (p_D + p_F) (v_D - v_F) = 0 \quad (16.151g)$$

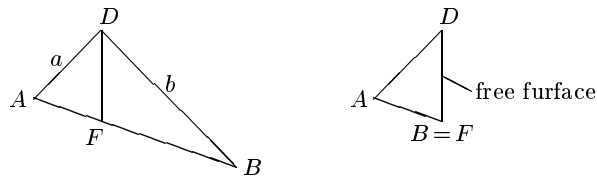
添え字は下図参照．その手順は平均値 [] を予測，(b)(d) 式から r_D, t_D を決定，(a)(c) 式から p_D, u_D を決定，点 F の値を点 A, B の値から補間，(g) 式と (16.144) から ϵ_D, v_D を決定， c_D を決定，(e)(f) 式から R_D を決定，2つの値の違いは数値計算の誤差，平均値 [] を修正，以上を反復する．下図の自由表面の場合には (c)(d)(f) 式は次のようになる．

$$p_D = 0$$

$$r_D = r_B$$

$$R_D - R_B - \frac{1}{2} (u_D + u_B) (t_D - t_B) = 0$$

この場合も同様に反復法で解かれる．



以上述べた方法によって，不連続がなければ与えられた初期値をもとにその影響領域へ解を延長することができる．

プログラム

この計算では後の計算に必要なもののみ記憶し計算の結果はそのつど出力する．特性のネットワークを繋いで，通常点，境界点，衝撃波点，自由表面点，端点などからなる計算点のチェーンを作り，各計算点のデータを次の 11 要素からなる解ベクトルに記憶する．

$$p, v, \epsilon, c, r, R, u, U, t \quad \text{論理関数} \times 2$$

ただし論理関数には媒質と計算点のタイプを識別する番号，当該および左右の点のアドレスを記憶，計算点のタイプを示す番号は

- 0 通常点 (ordinary point)
- 1 境界点 (interface point) 2つの媒質の境界
- 2 単純衝撃波点 (simple shock point) 静止気体中を伝播する衝撃波
- 3 複雑衝撃波点 (complex shock point) 運動気体中を伝播する衝撃波
- 4 自由表面点 (free surface point) 真空との境界
- 5 端点 (edge point) 膨張波の前面

とする。また $SIGN$ は計算点チェーンに沿って時間の増加と共に r が増加するときに正、 r が減少するときに負とする。 $SIGN$ の導入により左右に伝播する波が同じサブルーチンで計算可能になる。計算の結果は解ベクトル

SV リスト 特殊ベクトルリスト, 特殊点 2, 3, 4, 5 のアドレスと数

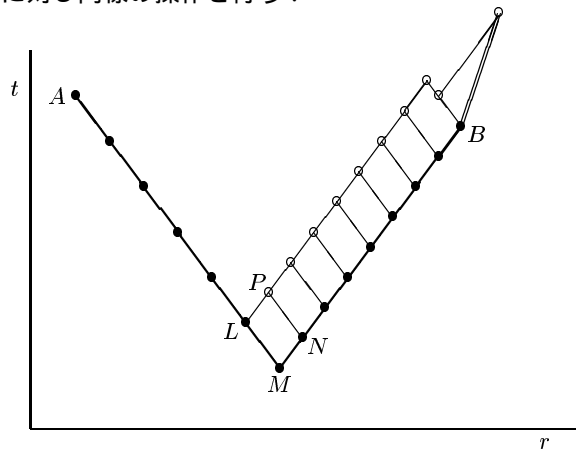
VV リスト 空白ベクトルリスト, 解で満たされない点のアドレスと数

$SIGN$

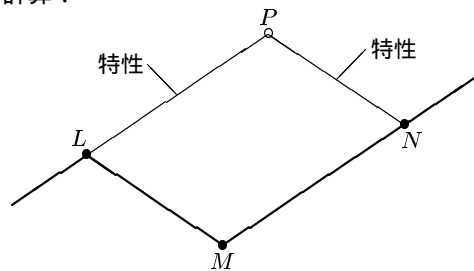
で表される。

この解法の一つの計算点チェーンの計算手順は次のようになる。

- (i) SV リストを走査し, t 最小の特殊点 B を選ぶ。
- (ii) 点 B のタイプ (2, 3, 4, or 5) を調べる。
- (iii) 更に B が干渉点かを調べ, もしそうであれば反射波, 透過波を計算する。
- (iv) B から左へ左隣接点の t が大きくなる点 M をさがす。点 LMN から通常点または境界点 P を計算する。(iv) の計算を B のところまで繰返し実行する。
- (v) 必要に応じ, B から右へ (iv) に相当の計算を実行する。
- (vi) 次の特殊点 A に対し同様の操作を行う。

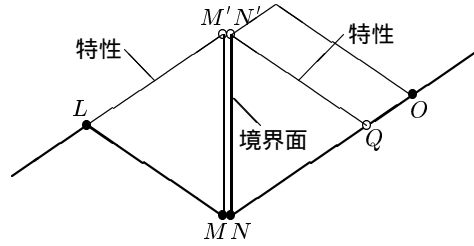


通常点 (タイプ 0) の計算:



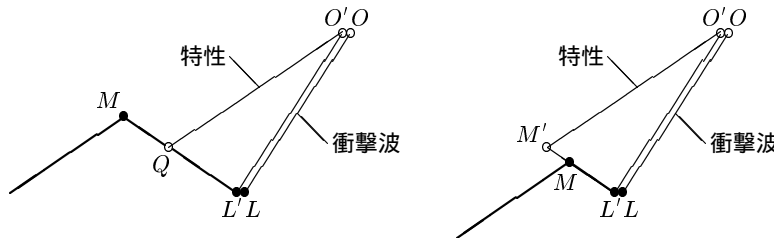
点 LMN のデータから点 P の位置と流れを計算する。式 (16.151a)–(16.151d) を特性 LP, NP に沿って用い p_P, r_P, u_P, t_P , 式 (16.151e)–(16.151g)(16.144) から $v_P, \epsilon_P, c_P, R_P$ を予測子修正子法で計算する。

境界点 (タイプ 1) の計算:



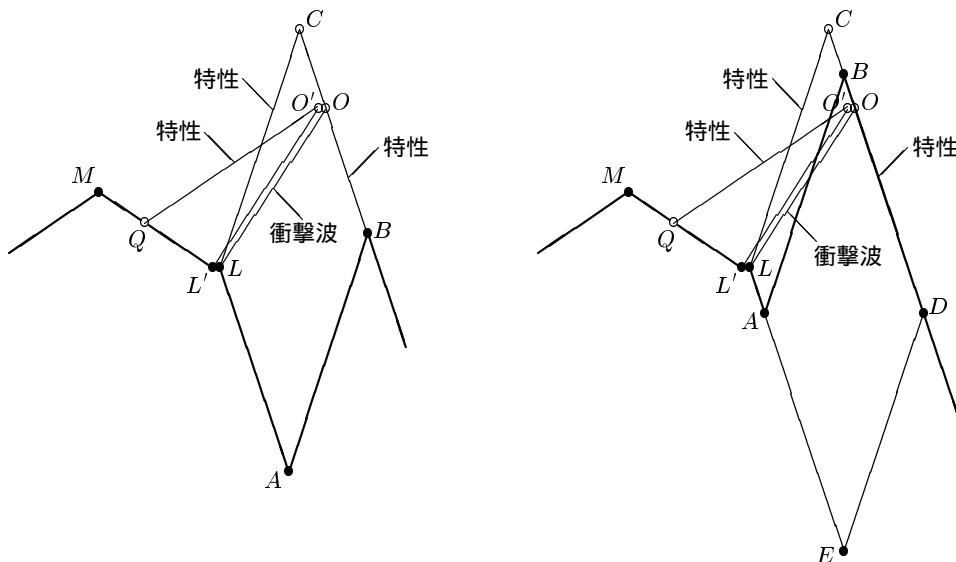
$SIGN$ は+とする. $r_{M'N'} = r_{MN}$. 平均値 [] の値を予測, 点 $M'N'$ の位置, 点 Q の位置を決定, () $_Q$ の値を補間, 特性 LM' に沿っての式 (16.151a) と QN' に沿っての式 (16.151c) から $p_{M'N'}$, $u_{M'N'}$ を決定, 流脈 MM' に沿っての式 (16.151g), (16.144) から $v_{M'}$, $v_{N'}$ を決定, 更に $\epsilon_{M'}$, $\epsilon_{N'}$, $c_{M'}$, $c_{N'}$ を決定する. 平均値 [] の値を修正し全体の計算を反復する. 式 (16.151e)(16.151f), $dR/dt = u$ から $R_{M'N'}$ を決定, 計算誤差をチェックする. なお点 O が Q の左にあるときには, O の代わりにその右隣接点を用いる.

単純衝撃波点 (タイプ 2) の計算:



$SIGN$ は+, $u_O = 0$, p_O , v_O , ϵ_O , c_O は既知とする. $R_{OO'}$ を指定する. $u_{O'}$ の値を予測, 式 (16.150) から $p_{O'}$, $v_{O'}$, $\epsilon_{O'}$, $c_{O'}$, U を決定する. 式 (16.149) から $t_{OO'}$ を決定, また点 Q の位置を決定, () $_Q$ の値を補間する. QO' に沿って式 (16.151a) の残差を計算, これを減らすように $u_{O'}$ を修正し, 以上の計算を反復する. QO' に沿っての式 (16.151e) から計算誤差をチェックする. 右図では M の代わりに M' を用いる.

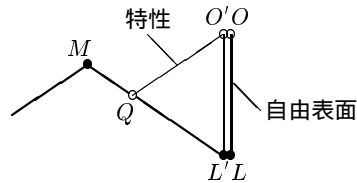
複雑衝撃波点 (タイプ 3) の計算:



衝撃波前方の低圧側のもとして () $_C$ を計算する. $u_{O'}$ の値を予測, U を予測, 式 (16.151e)(16.149) から $t_{OO'}$ 決定, () $_O$ の値を補間, 式 (16.150) から $p_{O'}$, $v_{O'}$, $\epsilon_{O'}$, $c_{O'}$, U 決定する. U を修正し以上の計

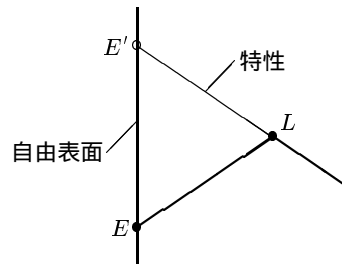
算を反復する． Q の位置を決定， $()_Q$ の値を補間， QO' に沿って式 (16.151a) の残差を計算， $u_{O'}$ を修正し以上の計算を反復する．右図では B を捨てる．

自由表面点 (タイプ 4) の計算：



自由表面点と単純衝撃波点の取扱いを同じにするため，対の点 OO' を用い，自由表面の条件を Rankine-Hugoniot の関係の退化したものと考える． $p_{OO'} = \epsilon_{OO'} = c_{OO'} = 0$ ， $r_{OO'}$ 既知とする． $R_{OO'}$ を指定する． $u_{OO'}$ を予測， OL に沿って $dR/dt = u$ から $t_{OO'}$ を決定，点 Q の位置を決定， $()_Q$ の値を補間， QO' に沿って式 (16.151a) の残差を計算，これを減らすように $u_{OO'}$ を修正，以上の計算を反復する．なお Q が点 M の左側にくるときには，点 M からの正特性の延長線と自由表面の交点に点 OO' を取る．

端点 (タイプ 5) の計算：



ここでは $SIGN$ 負とする． r_E ， $u_E(t)$ ， $R_E(t)$ は既知とする．平均値 $[]$ を予測，点 E' の位置を決定， $u_{E'}$ ， $p_{E'}$ ， $v_{E'}$ ， $\epsilon_{E'}$ ， $c_{E'}$ を決定， $R_{E'}$ を比較，平均値 $[]$ を修正し以上の計算を反復する．

1次元流れを解くには，以上述べたものの外に衝撃波と境界面の干渉 (反射波が衝撃波の場合，膨張扇の場合)，圧縮波からの衝撃波の生成，対向衝撃波 (opposite facing shocks) の干渉，追越し衝撃波 (overtaking shocks) の干渉などのサブルーチンを用意する必要がある．次にリーマン問題のサブルーチンを示す．

リーマン問題の解

本項でははじめに通常点，境界点などのサブルーチンを示し，次いでこれらを参考にリーマン問題のサブルーチンを作る．プログラム中の $q1, q2, \dots$ は静圧 $p = p$ ，比体積 $v = v$ ，比内部エネルギー $e = \epsilon$ ，音速 $c = c$ ，ラグランジュ座標系の距離 $r = r$ ，オイラー座標系の距離 $CR = R$ ，流速 $u = u$ ，衝撃波の伝播速度 $CU = U$ ，時間 $t = t$ の 9 要素からなる解ベクトルである．ORDINP は通常点のサブルーチンで，与えられたデータ $q1 = q_L$ ， $q3 = q_N$ から通常点の解ベクトル $q2 = q_P$ を求めるものである．INTERF は境界点のサブルーチンで，与えられたデータ $q1 = q_L$ ， $q2 = q_M$ ， $q3 = q_N$ ， $q4 = q_O$ から境界点の $q2 = q_{M'}$ ， $q3 = q_{N'}$ を求めるものである．また SSHOCK は単純衝撃波点のサブルーチンで，与えられたデータ $q1 = q_M$ ， $q2 = q_{L'}$ ， $q3 = q_L$ から衝撃波点の $q2 = q_{O'}$ ， $q3 = q_O$ を求めるものである．

リーマン衝撃波管流れ問題では初期状態の流速は 0 であるが，ここでは Godunov 法におけるリーマン問題を考え，初期流速は必ずしも 0 ではないものとする．図 16.27 はリーマン問題のサブルーチン RIEMANN の計算点を示したもので，ここでは \circ で示す点の位置と流れが求められる．すなわち予測子修正子法によ

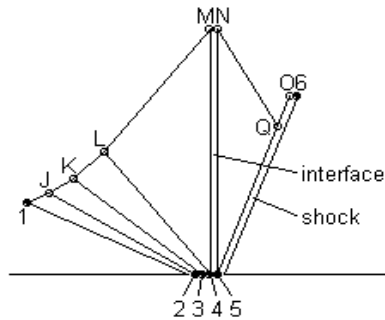


図 16.27: リーマン問題の計算点

り, 与えられた隔膜後方と前方の静圧, 比体積, 流速 $p_1, v_1, u_1, p_6, v_6, u_6$, 比熱比 γ , 予測値 p_4, v_5 を基に, 膨張扇内の点 JKL の位置と流れ, 衝撃波点 O の流れ, 境界点 MN の位置と流れの順に, それぞれサブルーチン `EXPFAN`, `RAKHUG` または `INTERF` を引用して反復計算される. 以下にこの計算に用いられるプログラムを示すが, 解の出力とグラフィックスに関する部分は省略してある. $s = SIGN$ に ± 1 を入れることにより流れの向きを変えることができる.

```

PROGRAM MAIN
!*****
! Problem: Riemann Shock Tube Flow Problem
! Numerical Method: Characteristic Method
!*****
PARAMETER(if=100)
DIMENSION q1(9),q2(9),q3(9),q4(9),q5(9),q6(9),qJ(9),qK(9),qL(9),qM(9),qN(9),qO(9), &
          qQ(9),x(0:if),qs(0:if,3),R(7),t(7)
COMMON ak,ak1,dR
DATA ak,dR/1.4,.1/; ak1=ak-1
! Initial data
DATA p1,v1,u1,p6,v6,u6/1.,1.,0., .1,10.,0./ !high and low pressure side conditions
q1(1)=p1; q1(2)=v1; q1(7)=u1; q6(1)=p6; q6(2)=v6; q6(7)=u6
CALL RIEMANN(q1,q2,q3,q4,q5,q6,qJ,qK,qL,qM,qN,qO,qQ,1.)
! Output of computational results
:
CALL RIEMANNCG(R,t,x,qs,if) !Graphics
STOP
END PROGRAM MAIN

SUBROUTINE ORDINP(q1,q2,q3,err) !ordinary point
REAL q1(9),q2(9),q3(9)
COMMON ak,ak1
p1=q1(1); v1=q1(2); e1=q1(3); c1=q1(4); r1=q1(5); CR1=q1(6); u1=q1(6); t1=q1(9)
p3=q3(1); v3=q3(2); e3=q3(3); c3=q3(4); r3=q3(5); CR3=q3(6); u3=q3(6); t3=q3(9)
aa=c1/v1; ab=c3/v3
na=0
1 na=na+1
rhsa=r1-aa*t1; rhsb=r3+ab*t3; del=aa+ab
rP=(rhsa*ab+rhsb*aa)/del; tP=(rhsb-rhsa)/del
rhsa=p1+aa*u1; rhsb=p3-ab*u3; del=-aa-ab
pP=(-ab*rhsa-aa*rhsb)/del; uP=(rhsb-rhsa)/del
pF=((rP-r3)*p1+(r1-rP)*p3)/(r1-r3)
vF=((rP-r3)*v1+(r1-rP)*v3)/(r1-r3)
eF=((rP-r3)*e1+(r1-rP)*e3)/(r1-r3)

```

```

pm=.5*(pP+pF); vP=(eF+pm*vF)/(pP/ak1+pm)
eP=pP*vP/ak1; cP=SQRT(ak*pP*vP)
aa=.5*(c1/v1+cP/vP); ab=.5*(c3/v3+cP/vP)
IF(na.LE.2)                                GOTO 1
CRa=CR1+.5*(u1+c1+uP+cP)*(tP-t1)
CRb=CR3+.5*(u3-c3+uP-cP)*(tP-t3)
CRP=.5*(CRa+CRb); err=CRa-CRb
q2(1)=pP; q2(2)=vP; q2(3)=eP; q2(4)=cP; q2(5)=rP; q2(6)=CRP; q2(7)=uP; q2(9)=tP
END SUBROUTINE ORDINP

SUBROUTINE INTERF(q1,q2,q3,q4,qQ,s,err)      !interface point
REAL q1(9),q2(9),q3(9),q4(9),qQ(9)
COMMON ak,ak1
p1=q1(1); v1=q1(2); c1=s*q1(4); r1=q1(5); CR1=q1(6); u1=q1(7); t1=q1(9)
v2=q2(2); e2=q2(3)
p3=q3(1); v3=q3(2); e3=q3(3); c3=s*q3(4); r3=q3(5); CR3=q3(6); u3=q3(7); t3=q3(9)
p4=q4(1); v4=q4(2); r4=q4(5); CR4=q4(6); u4=q4(7); t4=q4(9)
rN=q3(5)
aa=c1/v1; ab=c3/v3; ac=(r3-r4)/(t3-t4)
na=0
1 na=na+1
tN=t1+1./aa*(rN-r1)
rhsb=rN+ab*tN; rhsc=r3-ac*t3; del=-ab-ac
rQ=(-ac*rhsb-ab*rhsc)/del; tQ=(rhsc-rhsb)/del
pQ=((rQ-r4)*p3+(r3-rQ)*p4)/(r3-r4)
vQ=((rQ-r4)*v3+(r3-rQ)*v4)/(r3-r4)
eQ=pQ*vQ/ak1; cQ=s*SQRT(ak*pQ*vQ)
uQ=((rQ-r4)*u3+(r3-rQ)*u4)/(r3-r4)
rhsa=p1+aa*u1; rhsb=pQ-ab*uQ; del=-aa-ab
pN=(-ab*rhsa-aa*rhsb)/del; uN=(rhsb-rhsa)/del
pb=.5*(p3+pN)
vM=(e2+pb*v2)/(pN/ak1+pb); eM=pN*vM/ak1; cM=s*SQRT(ak*pN*vM)
vN=(e3+pb*v3)/(pN/ak1+pb); eN=pN*vN/ak1; cN=s*SQRT(ak*pN*vN)
aa=.5*(c1/v1+cM/vM); ab=.5*(cQ/vQ+cN/vN)
IF(na.LE.2)                                GOTO 1
CRQ=((rQ-r4)*CR3+(r3-rQ)*CR4)/(r3-r4)
CRM=CR1+.5*(u1+c1+uN+cM)*(tN-t1)
CRN=CRQ+.5*(uQ-cQ+uN-cN)*(tN-tQ)
CR =CR3+.5*(u3+uN)*(tN-t3)
err=ABS(CRM-CR)+ABS(CRN-CR); CRM=.5*(CRN+CRN)
q2(1)=pN; q2(2)=vM; q2(3)=eM; q2(4)=s*cM; q2(5)=rN; q2(6)=CRN; q2(7)=uN; q2(9)=tN
q3(1)=pN; q3(2)=vN; q3(3)=eN; q3(4)=s*cN; q3(5)=rN; q3(6)=CRN; q3(7)=uN; q3(9)=tN
qQ(1)=pQ; qQ(2)=vQ; qQ(3)=eQ; qQ(4)=s*cQ; qQ(5)=rQ; qQ(6)=CRQ; qQ(7)=uQ; qQ(9)=tQ
IF(s*rQ>s*r4)FORALL(i=1:9)q3(i)=qQ(i)
END SUBROUTINE INTERF

SUBROUTINE SSHOCK(q1,q2,q3,s,err)           !simple shock point
REAL q1(9),q2(9),q3(9),q0(9)
COMMON ak,ak1,dR
FORALL(i=1:9)q0(i)=q2(i)
p1=q1(1); v1=q1(2); c1=s*q1(4); r1=q1(5); CR1=q1(6); u1=q1(7); t1=q1(9)
p2=q2(1); v2=q2(2); c2=s*q2(4); r2=q2(5); CR2=q2(6); u2=q2(7); t2=q2(9)
v3=q3(2)
CR0=CR2+s*dR; r0=r2+s*dR/v3
aa=c2/v2; ab=.5*(c1/v1+c2/v2); bb=(r1-r2)/(t1-t2)
1 p0=q0(1); v0=q0(2); c0=s*q0(4); u0=q0(7); CU=q0(8)
t0=t2+s*dR/CU

```

```

rhsa=r0-aa*t0; rhsb=r2-bb*t2; del=aa-bb
rQ=(-bb*rhsa+aa*rhsb)/del; tQ=(rhsb-rhsa)/del
pQ=((rQ-r2)*p1+(r1-rQ)*p2)/(r1-r2)
vQ=((rQ-r2)*v1+(r1-rQ)*v2)/(r1-r2)
eQ=pQ*vQ/ak1; cQ=s*SQRT(ak*pQ*vQ)
uQ=((rQ-r2)*u1+(r1-rQ)*u2)/(r1-r2)
aa=.5*(cQ/vQ+c0/v0)
u01=uQ-(p0-pQ)/aa
alpha=.7; du=u01-u0; u0=u0+alpha*du
q0(7)=u0
CALL RANHUG(q3,q0,n)
IF(ABS(du).GE..001) GOTO 1
CRQ=((rQ-r2)*CR1+(r1-rQ)*CR2)/(r1-r2)
CR01=CRQ+.5*(uQ+cQ+u0+c0)*(t0-tQ); err=CR01-CR0
IF(s*rQ>s*r1)THEN
  q1(1)=pQ; q1(2)=vQ; q1(3)=eQ; q1(4)=s*cQ; q1(5)=rQ; q1(6)=CRQ; q1(7)=uQ; q1(9)=tQ
ENDIF
FORALL(i=1:9)q2(i)=q0(i); q2(5)=r0; q2(6)=CR0; q2(9)=t0
  q3(5)=r0; q3(6)=CR0; q3(9)=t0
END SUBROUTINE SSHOCK

SUBROUTINE RIEMANN(q1,q2,q3,q4,q5,q6,qJ,qK,qL,qM,qN,q0,qQ,s) !s=SIGN
REAL q1(9),q2(9),q3(9),q4(9),q5(9),q6(9),qJ(9),qK(9),qL(9),qM(9),qN(9),q0(9),qQ(9)
COMMON ak,ak1
OPEN(20,FILE='OUTPUT.dat')
! initial data q=(p,v,e,c,r,R,u,U,t)
p1=q1(1); v1=q1(2); q1(3)=p1*v1/ak1; c1=s*SQRT(ak*p1*v1); q1(4)=s*c1; u1=q1(7)
p6=q6(1); v6=q6(2); q6(3)=p6*v6/ak1; c6=s*SQRT(ak*p6*v6); q6(4)=s*c6; u6=q6(7)
DATA CR11,CR61,p4,v5/-.1, .4, .28, 5./
!DATA CR11,CR61,p4,v5/-.1, .4, .5, 2./
CR1=s*CR11; CR6=s*CR61
! r: R1=(1-s*u1/c1)v1r1, r2=r3=r4=r5=0, R6=v6r6+u6t6
q1(5)=-c1/v1/(u1-c1)*CR1
! R1:given, R2=R3=R4=R5=0, R6:given
q1(6)=CR1; q6(6)=CR6; q0(6)=CR6
! u1:given, u2,u3,u4:pcm, u5=u4, u6:given
! t1=-R1/(u1+s*c1), t2=t3=t4=t5=0, t6=R6/U
q1(9)=-CR1/(u1+c1)
w=u1+2.*c1/ak1
na=0
1 na=na+1
! p1:given, p2,p3,p4:pcm, p5=p4, p6:given
p2=(2.*p1+p4)/3.; p3=(p1+2.*p4)/3.; p5=p4
! v1:given, v2,v3,v4:Riemann invariant, v5:pcm, v6:given
! e=pv/(k-1); c^2=kpv
WRITE(20,'(1H 5X A4,I3)')na =',na
WRITE(20,'(2X 9A9)')p','v','e','c','r','R','u','U','t'
WRITE(20,'(A5,9F9.3)')q1 =',q1
qJ(1)=p2
CALL EXPFAN(q1,qJ,s,w,n,err)
WRITE(20,'(A5,10F9.3,I4)')qJ =',qJ,err,n
qK(1)=p3
CALL EXPFAN(qJ,qK,s,w,n,err)
WRITE(20,'(A5,10F9.3,I4)')qK =',qK,err,n
qL(1)=p4
CALL EXPFAN(qK,qL,s,w,n,err)
WRITE(20,'(A5,10F9.3,I4)')qL =',qL,err,n

```

```

q0(2)=v5; q0(7)=qL(7)
CALL RANHUG(q6,q0,n)
t6=q6(6)/q0(8); q6(9)=t6; q0(9)=t6
r6=(CR6-u6*t6)/v6; q6(5)=r6; q0(5)=r6
WRITE(20,'(A5,9F9.3)') 'q6 = ',q6
WRITE(20,'(A5,9F9.3,9X I4)') 'q0 = ',q0,n
FORALL (i=1:9)qM(i)=qL(i); qM(5)=0.; qM(6)=0.; qM(9)=0.
FORALL (i=1:9)qN(i)=q0(i); qN(5)=0.; qN(6)=0.; qN(9)=0.; qN(8)=0.
CALL INTERF(qL,qM,qN,q0,qQ,s,err)
WRITE(20,'(A5,10F9.3)') 'qM = ',qM,err
WRITE(20,'(A5, 9F9.3)') 'qN = ',qN,'qQ = ',qQ
dp=qM(1)-q0(1); du=qM(7)-q0(7)
IF(na>20.OR.ABS(dp)+ABS(du)<=.0001) RETURN
alpha=.7; dp=q0(1)-p4; p4=p4+alpha*dp
v5=q0(2); GOTO 1
END SUBROUTINE RIEMANN

```

```

SUBROUTINE EXPFAN(q1,q2,s,w,n,err) !Expansion fan
REAL q1(9),q2(9)
COMMON ak,ak1
p1=q1(1); v1=q1(2); c1=s*q1(4); r1=q1(5); u1=q1(7); t1=q1(9)
p2=q2(1); c2=c1; v2=v1
n=0
1 n=n+1; IF(n>20)STOP
aa=.5*(c1/v1+c2/v2)
u2=u1-(p2-p1)/aa
c2=ak1*(w-u2)/2.; v21=c2*c2/ak/p2; dv=v21-v2
v2=v21
IF(ABS(dv)>.001) GOTO 1
q2(3)=p2*v2/ak1
a2=c2/v2; r2=(r1-aa*t1)/(1+aa/a2); t2=-r2/a2
q2(6)=q1(6)+.5*(u1+c1+u2+c2)*(t2-t1)
q2(2)=v2; q2(4)=s*c2; q2(5)=r2; q2(7)=u2; q2(9)=t2
END SUBROUTINE EXPFAN

```

```

SUBROUTINE RANHUG(q0,q1,n) !Rankine-Hugoniot equations
REAL q0(9),q1(9)
COMMON ak,ak1
OPEN(20,FILE='OUTPUT.dat')
p0=q0(1); v0=q0(2); e0=q0(3); c0=q0(4); u0=q0(7)
v1=q1(2); u1=q1(7)
n=0; !WRITE(20,'(1H 6A9)') 'n', 'p1', 'v11', 'v1', 'e1', 'c1'
1 n=n+1; IF(n>20) STOP
p1=p0+(u1-u0)*(u1-u0)/(v0-v1)
e1=p1*v1/ak1; c1=SQRT(ak*p1*v1)
v11=v0-2.*(e1-e0)/(p0+p1)
alpha=.16; dv=v11-v1; v1=v1+alpha*dv !small damping factor
!WRITE(20,'(5X I5,1X 5F9.3)')n,p1,v11,v1,e1,c1
IF(ABS(dv)>.001) GOTO 1
CU=(v0*u1-v1*u0)/(v0-v1)
q1(1)=p1; q1(2)=v1; q1(3)=e1; q1(4)=c1; q1(8)=CU
END SUBROUTINE RANHUG

```

ここで多少補足説明すれば，隔膜は原点 $r = R = 0$ にあり，オイラー座標 R とラグランジュ座標 r の関

係は次のようになる .

$$dR = v dr \quad (t = \text{const.に沿って}); \quad dR = u dt \quad (r = \text{const.に沿って})$$

$$dR = \left(1 \pm \frac{u}{c}\right) v dr \quad (\text{特性 } dr \pm (c/v)dt = 0 \text{ に沿って})$$

なお静止流体中では任意の方向に $dR = v dr$ である . また完全気体の関係が成立し $\epsilon = pv/(\gamma-1)$, $c^2 = \gamma pv$ なる関係が成立するものとする . 膨張扇に関しては線 $2J$, $3K$, $4L$ は特性で , これらの各特性上の流れは一定になる . またこれらの特性を横断する正特性 $dr/dt = u+c$ 上では , 式 (16.151a) が成立しかつリーマン不変量 $w = u + 2c/(\gamma-1)$ が一定になるので , p の値を与えれば v , ϵ , c , u の値は決定できることになる . 解の収束状況は $|dp| + |du| < 0.0001$ から判定される . ただし $dp = p_M - p_O$, $du = u_M - u_O$ である . プログラムでは前記の計算結果を基に良質の予測値を与えているが , かなりはずれた予測値 , 例えば $p_4 = 0.5$, $v_5 = 2.0$ を与えても 5 回の反復で同じ結果が得られる . なおサブルーチン RAKHUG では v_1 の修正に際し強いダンピング係数 0.16 を用いている . また全体の予測子修正子法の計算でも p_4 の修正にダンピング係数 0.7 を用いている . これらの係数は試行錯誤で決定したものでこの場合の最適値に近いものである .

図 16.28 に計算で求めた $s = 1$ の場合の xt 面上の膨張扇 , 境界面 , 衝撃波と , $t = 2.0$ における密度 , 流速 , 静圧の分布を示す . なお $s = -1$ に選べば逆向きの解が得られる .

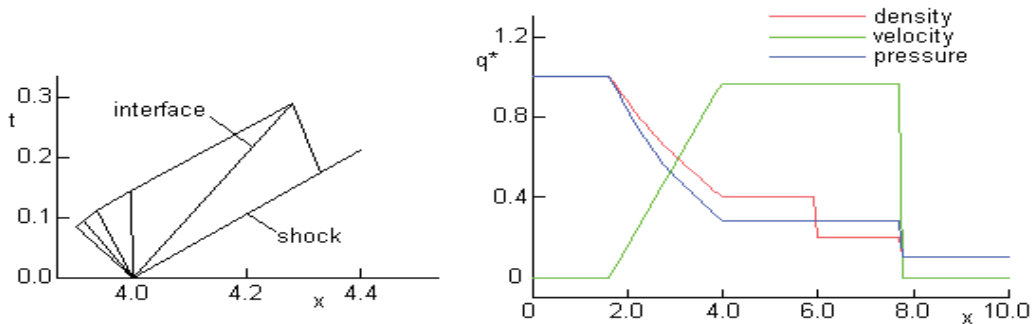


図 16.28: xt 面上の膨張扇等と $t = 2.0$ の密度等分布