

# 第17章 圧縮性流れの解法—Navier-Stokes 方程式

前章では、2 独立変数の双曲型偏微分方程式の特性の理論を一通り説明した後に、この理論に基づく 1 次元オイラー方程式の初期値問題の 3 つの解法、すなわち流束ベクトル分離法、流束差分分離法、有限体積法について詳しく述べた。本章では、流束差分分離法と有限体積法を多次元に、また拡散項を含め Navier-Stokes 方程式の解法に拡張する。この拡張に伴って方程式系の式の数と項数は増えるが双曲型の性質は変わらないので、この拡張は困難なく実行できる。ここでは 3 次元のデカルト座標系と一般曲線座標系に対し、また一般座標系に対しては反変速度または質量流束の運動方程式についてこれらの解法の説明を行う。最後に計算の高効率化についても述べる。

## 17.1 3 独立変数以上の双曲型微分方程式

はじめに 非定常 2 次元または 3 次元流れの Euler 方程式にも適用できる 3 独立変数以上の双曲型偏微分方程式の理論について述べる。この理論に関する定番ともいえる解説書は Courant の著書である<sup>1</sup>。しかしながら この本を読破するには数学的素養と相当の時間が必要である。以下にはこの本の中から必要最低限の事項を選びあえて不完全ともいえる図を補い平易に解説する。この解説は入門書で、諸式の導出と解釈についてはやや詳しく述べるが、定理の証明はほとんど省略されているので関心のある読者は Courant の原著を参照されたい。

双曲型偏微分方程式の理論は、この方程式の初期値問題の解がいかにか構成されるのかを数学的に論じ、また双曲型方程式で支配される非定常 2 次元または 3 次元空間の波動現象、すなわち特性面に沿って伝播する波の挙動を明らかにするものである。この多次元の特性の理論に基づいて作られた解法は物理現象に則したもので適正な解を与えるものと思われる。しかしながら現時点での解法の主流は、各座標軸方向に 1 次元流れの特性の理論に基づく流束分離法を適用して多次元問題に対処しようとするもので、本章の内容もこの範囲を出るものではない。このような解法は衝撃波の捕獲に関し問題があるとの指摘もあり、このことを可能ならば本章の終わりに検証したいと考えている。

というわけで、本章に述べる二つの解法を理解するには本節を読み飛ばしても特に支障はない。とはいえ、この分野の研究者には本節の内容程度のごことは理解されることを期待する一方、大学の数学の講義でも、コンピュータの時代にあわせて不要不急のものは切捨て、「微分方程式論」で式の意味や解の構成、また「数値解法」で解法の選び方や解き方を教授されることを望むものである。

---

<sup>1</sup>R. Courant, "Methods of Mathematical Physics, Vol. II Partial Differential Equations," 1962, Interscience Publishers. 日本語訳, R. クーラン・D. ヒルベルト, 数理物理学の方法, 4, 麻嶋訳, 東京図書.

### 17.1.1 3 独立変数以上の双曲型方程式の Cauchy 問題

3 独立変数以上の 1 階準線形偏微分方程式系 (first-order quasi-linear partial differential equations in more than two independent variables) は一般に次のように書くことができる .

$$L[u] \equiv \sum_{i=0}^n A^i D_i u = f \quad (17.1a)$$

ただし  $u(x)$  は  $k$  成分の未知変数ベクトル ,  $A^i$  は  $k \times k$  成分の係数行列で ,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \quad A^i = \begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \cdots & a_{1k}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \cdots & a_{2k}^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}^i & a_{k2}^i & \cdots & a_{kk}^i \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \quad (17.1b)$$

また  $A^i$  と  $f$  は一般に  $x_0, x_1, \dots, x_n$  と  $u$  の関数である . 時間依存問題では ,  $x_0 = t$  は時間 , また  $x_1, \dots, x_n$  は  $n$  次元空間座標である .  $D_i \equiv \partial/\partial x_i$  .  $A^0$  は単位行列  $I$  とすることができる . 式 (17.1) は , 1 階微分  $D_i u$  の 1 次式で , 1 階準線形偏微分方程式系である .

一般に  $m$  次元空間内の面は  $m-1$  次元 , 線は 1 次元 , 2 次元から  $m-2$  次元の部分空間は多様体 (manifold) と呼ばれる . 当然のことながら ,  $k$  次元の多様体の中には  $k$  次元の座標系を取ることができる .  $m$  次元空間の座標  $x_1, \dots, x_m$  に 1 つの拘束条件をかせば面を作ることができる . 例えば  $\psi(x) = 0$  は一つの面の式である .  $\psi(x) = c$  と置き , パラメータ  $c$  の値を変えれば , 1 パラメータ族の面を発生させることができる . したがって  $\psi$  は面  $\psi(x) = 0$  のそとの座標になる . 上記の  $n+1$  次元の  $x$  空間内に一つの面  $\phi(x) = 0$  を取る . この面の法線は  $\nabla\phi (\equiv \xi)$  である . この  $n$  次元の面の中に座標  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  , 外に  $\lambda_0 = \phi$  を取る . 今独立変数を  $x$  から  $\lambda$  に変えれば ,

$$D_i u = \xi_i u_\phi + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} u_{\lambda_j}$$

ただし  $\xi_i \equiv \partial\phi/\partial x_i = D_i \phi$  である . この関係を用いれば式 (17.1) は次のように書換えられる .

$$\sum_{i=0}^n A^i \xi_i u_\phi = g \quad (17.2a)$$

あるいは簡単に

$$A u_\phi = g \quad (17.2b)$$

ただし

$$A = \sum_{i=0}^n A^i \xi_i \quad (17.2c)$$

また  $g$  は  $\lambda, u, u_{\lambda_1}, \dots, u_{\lambda_n}$  の関数である .

式 (17.1) がどのような条件を満足するときに双曲型になるのかという議論は先送りにし , ここでは式 (17.1) が双曲型であるとしてその Cauchy 問題 (初期値問題) を考える . この問題は基本的には与えられた初期曲

面  $\phi = 0$  上に初期値  $u$  が与えられるときに, この初期値を満足する式 (17.1) の解  $u(x)$  を初期曲面の近傍で求める問題である. まず初期曲面上のいたるところで

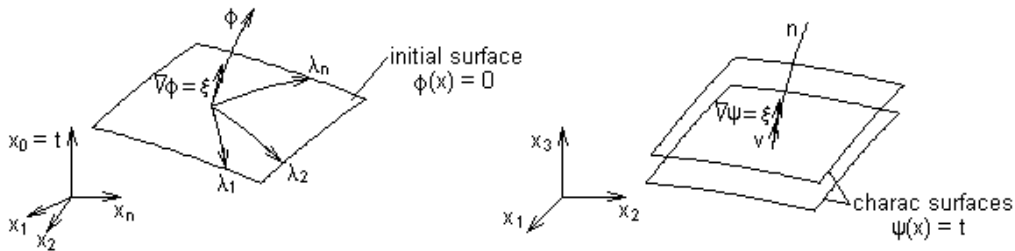
$$Q(\xi) \equiv |A| \neq 0$$

の場合には, 初期曲面上に  $u$  の値が与えられれば,  $u_{\lambda_1}, \dots, u_{\lambda_n}$  は既知で, したがって,  $A$  と  $g$  も既知になる (下図参照). 式 (17.2) は  $u_\phi$  の連立 1 次方程式で,  $|A| \neq 0$  であるから  $u_\phi$  の値は一意的に決定できる. このようにして初期曲面上で関数値  $u$  とその法線微分値  $u_\phi$  が分かれば, 初期曲面  $\phi = 0$  のごく近傍の面  $\phi = c$  上で  $u$  の値が分かることになり,  $\phi = c$  を初期曲面と見て同様のことを繰返せば, 解  $u(x)$  を初期曲面  $\phi = 0$  の近傍に延長することができる. この場合には初期値  $u$  を任意に与えることができ, 解  $u(x)$  を一意的に求めることができる. このような初期曲面を無拘束 (free) であるという.

他方 初期曲面上のいたるところで特性条件

$$|A| = Q(\xi) = Q(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \tag{17.3}$$

が満足される場合にはこの面は  $L$  の特性面と呼ばれる. この場合には  $u_\phi$  の連立 1 次方程式 (17.2) を構成する  $k$  個の式は 1 次独立でなくなる. 式 (17.2) の  $g$  はこの式が正則になるように与えなければならず, 初期値  $u$  は任意にではなく  $g$  がそのようになるように与えなければならない<sup>2</sup>. この場合にはまた, 式 (17.2) から  $u_\phi$  の値は一意的には定まらず, 初期曲面上の一つの初期値  $u$  から無数の解を延長することができる.



### 17.1.2 法線錐, 射線錐, 特性面の構成

時間  $t (= x_0)$  を別扱いにして特性面を次のように表すことにする (上図参照).

$$\phi(x, t) = \psi(x) - t = 0 \tag{17.4}$$

この特性面は,  $\psi(x) = \text{const.} = t$  で  $x$  空間内を伝播する. この面の法線方向距離を  $n$  とすれば, 特性面の法線速度は  $v = dn/dt$ , また  $\psi$  の勾配は  $\xi = \nabla\psi = d\psi/dn = dt/dn$  となる. ベクトル  $\xi$  と  $v$  は同じ方向で

$$\sum_{i=1}^n \xi_i v_i = \xi \cdot v = 1$$

また  $\xi = v/v^2$ ,  $v = \xi/\xi^2$  である.

式 (17.4) から  $\xi_0 = \partial\phi/\partial t = -1$ ,  $\xi_i = \partial\phi/\partial x_i = \partial\psi/\partial x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), したがってこの場合の特性の条件は式 (17.3) から

$$Q(-1, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0 \tag{17.5a} \quad (\xi_i = D_i\psi)$$

<sup>2</sup>この意味が納得できないときには 16.1 節を参照してください.

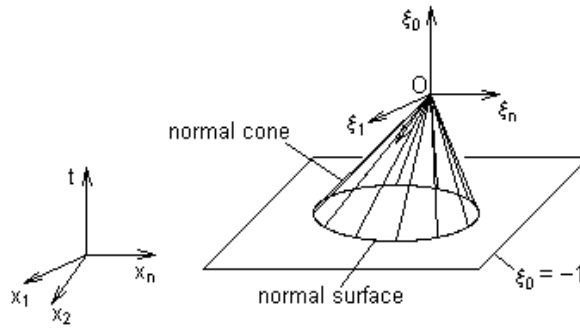


図 17.1: 法線錐と法線面

あるいは成分で書けば

$$\begin{vmatrix} a_{11}^1 \xi_1 + \cdots + a_{11}^n \xi_n - 1 & a_{12}^1 \xi_1 + \cdots + a_{12}^n \xi_n & \cdots & a_{1k}^1 \xi_1 + \cdots + a_{1k}^n \xi_n \\ a_{21}^1 \xi_1 + \cdots + a_{21}^n \xi_n & a_{22}^1 \xi_1 + \cdots + a_{22}^n \xi_n - 1 & \cdots & a_{2k}^1 \xi_1 + \cdots + a_{2k}^n \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^1 \xi_1 + \cdots + a_{k1}^n \xi_n & a_{k2}^1 \xi_1 + \cdots + a_{k2}^n \xi_n & \cdots & a_{kk}^1 \xi_1 + \cdots + a_{kk}^n \xi_n - 1 \end{vmatrix} = 0$$

この式は  $\xi_i$  の  $k$  次の同次方程式である．特性面  $\psi = t$  の単位法線ベクトルを  $\alpha$  とすれば， $\alpha_i = \xi_i/|\xi|$ ，式 (17.5a) から特性面の速度  $v$  の方程式は次のように導かれる．

$$Q(-|v|, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (17.5b)$$

次に，特性条件の式 (17.3) の幾何学的解釈について述べる．この式は， $n+1$  次元の  $xt$  空間内のある点  $O$  を通る特性面の点  $O$  における法線  $\xi (= \nabla \phi)$  を拘束する式である．例えば 3 次元空間  $xyt$  では，ある点  $O$  における  $\xi$  は，あらゆる方向 (2 パラメータ族の法線) を取り得るのではなく， $Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0$  により 1 つ次元が下がり点  $O$  に頂点を持つ一つの錐面 (1 パラメータ族の法線からなる) 内に制限される．一般に式 (17.3) はこのような  $n-1$  パラメータ族の法線からなる錐面の式で，この錐面は法線錐 (normal cone) と呼ばれる (図 17.1)．また時間  $t$  を特別扱った式 (17.5a) はこの法線錐の  $\xi_0 = -1$  面による切り口を表し，これは  $\xi_1, \dots, \xi_n$  空間内の法線面 (normal surface) と呼ばれる．上述のように，特性面の法線速度  $v$  は  $\xi$  と同じ方向を持ち， $\xi \cdot v = 1$  であるから，法線面を単位球面  $\xi^2 = 1$  に関して反転し， $v_1, \dots, v_n$  空間内に法線速度面 (normal velocity surface) を作ることができる．この面はまた相反法線面 (reciprocal normal surface) とも呼ばれる．

特性方程式  $Q(\xi) = 0$  は  $\phi(\xi)$  の 3 独立変数以上の 1 階非線形微分方程式である．この項の議論を先に進めるには 1 階非線形微分方程式の理論を用いる必要がある．以下には読者がこの理論を知らないものとしてまず簡単な 2 独立変数の 1 階準線形微分方程式，次いでこれとの比較において 3 独立変数以上の 1 階非線形微分方程式の理論について略述する．

2 独立変数 1 階準線形微分方程式は次のように書くことができる．

$$au_x + bu_y = c \quad (17.6)$$

ただし  $u(x, y)$  はスカラーの未知変数， $a, b, c$  は一般に  $xyu$  の関数で， $a^2 + b^2 \neq 0$ ．式 (17.6) は，

$$(a \ b \ c) \cdot (u_x \ u_y \ -1) = 0$$

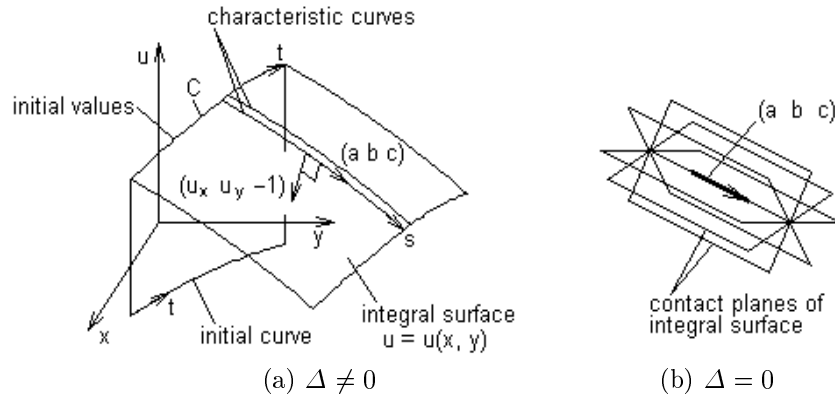


図 17.2: 2 独立変数 1 階準線形微分方程式の初期値問題

のように書換えることができるので,  $xyu$  空間内のベクトル  $(a \ b \ c)$  と解曲面 (integral surface)  $u = u(x, y)$  の法線ベクトル  $(u_x \ u_y \ -1)$  が直交することを示している<sup>3</sup>. ベクトル  $(a \ b \ c)$  を Monge 軸, またいたるところで接線が Monge 軸の方向をとる曲線を特性曲線 (characteristic curve) と呼ぶ<sup>4</sup>. 特性曲線に沿ってパラメータ  $s$  を適切に取れば, 特性曲線は次の常微分方程式で与えられる.

$$dx/ds = a, \quad dy/ds = b, \quad du/ds = c \tag{17.7}$$

特性曲線は図 17.2(a) に示すように一つの解曲面上に乗っている.

微分方程式 (17.6) は初期値問題として解かれる. 初期曲線上に初期値  $u$  を与え曲線  $C$  を  $x = x(t), y = y(t), u = u(t), x_t^2 + y_t^2 \neq 0$  で定義する. 式 (17.6) の初期値問題は  $C$  上の各点を通る式 (17.7) の特性曲線族

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t)$$

の作る解曲面  $u(x, y)$  を  $C$  の近傍で求める問題である ( $C$  上で  $s = 0$ ). この面が形成されるためには, 上式の第 1 式と第 2 式を  $s$  または  $t$  で微分したものが独立でなければならない. すなわち

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x_t & y_t \end{vmatrix}$$

で定義される  $\Delta$  がゼロでないという条件が満足されなければならない<sup>5</sup>. まず初期曲線が特性でない  $\Delta \neq 0$  の場合には, 初期値  $u(t)$  は任意に与えることができ, また解  $u = u(x, y)$  を図 17.2(a) に示すようにこの初期値を通る 1 パラメータ族の特性曲線を引くことによって一意的に求めることができる. 特性の理論ではこのように偏微分方程式が常微分方程式系に置換えられ, 特性の方法ではこの常微分方程式系が初期値問題として数値的に解かれる.

他方 初期曲線が一つの特性曲線  $\Delta = 0$  の場合には, 初期値  $u(t)$  が, 式 (17.6) すなわち  $dx : dy : du = a : b : c$  なる条件を満足するように与えられるときにのみ初期値問題は成立し, 図 17.2(b) に示すようにこの初期値から無数の解を延長することができる.

<sup>3</sup>念のため, 解曲面は  $F(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0$  のように表されその法線ベクトルは  $\nabla F = (u_x \ u_y \ -1)$  となる.

<sup>4</sup>Monge 軸は  $xyu$  空間内の方向場で, 特性曲線は Monge 軸の包絡線であるともいえる.

<sup>5</sup>逆に 曲線  $C$  が特性であれば,  $C$  上で  $s$  と  $t$  の方向は同じで,  $x_s : x_t = y_s : y_t$ , したがって  $x_s y_t - x_t y_s = 0$  となる.

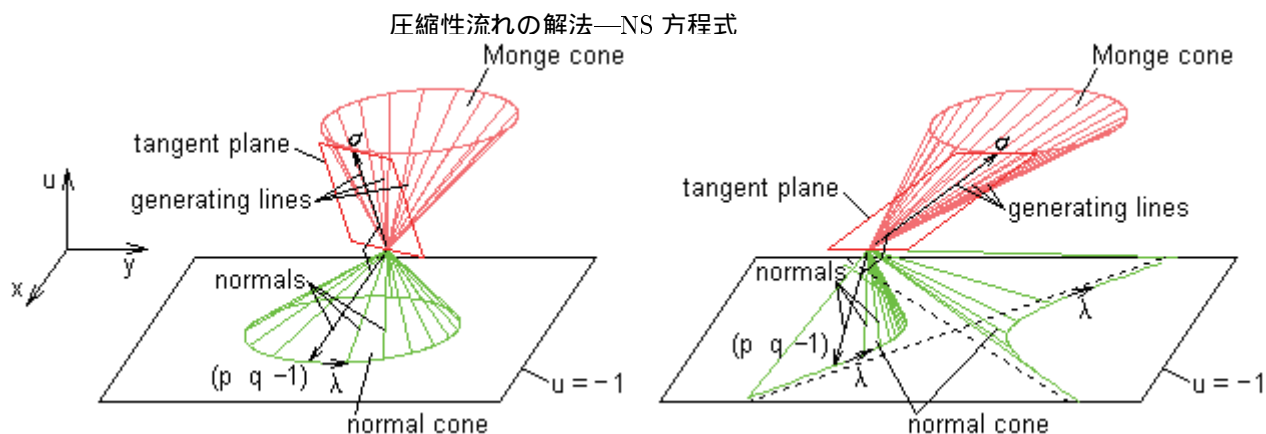


図 17.3: 法線錐と Monge 錐

次に 3 独立変数以上の 1 階非線形微分方程式を考える .

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (17.8)$$

ただし  $p_i = \partial u / \partial x_i$ ,  $\sum F_{p_i}^2 \neq 0$  である . ここでは上記の理論の独立変数  $x, y$  は  $x_1, \dots, x_n$  となり, その結果 2 次元の面は  $n$  次元の面に, 線は線または  $n-1$  次元の多様体になる . また準線形から非線形への一般化に伴い Monge 軸は Monge 錐に変身する . 式 (17.8) は, 式 (17.3) と同様に幾何学的に解釈することができる . すなわち  $n+1$  次元の  $xu$  空間内で, 一つの点  $O$  を通るすべての可能な解曲面  $u = u(x)$  の点  $O$  における法線ベクトル  $(p_1 \dots p_n -1)$  は点  $O$  に頂点を持つひとつの錐面になる . この錐面は法線錐と呼ばれる . 敷衍すればこの法線ベクトルは, あらゆる方向を取りうるのではなく, 式 (17.8) の条件により次元が一つ下がり  $n=2$  の場合には 1 パラメータ族の法線からなる法線錐,  $n=n$  の場合には  $n-1$  パラメータ族の法線からなる法線錐内に制約されるということである .

点  $O$  を通るすべての可能な解曲面の点  $O$  における接平面の包絡面も点  $O$  に頂点を持つ錐面になる . この錐面は Monge 錐または特性錐 (Monge cone, characteristic cone) と呼ばれる . 特性曲線はいたるところでその接線が特性錐の母線方向を取る曲線である . 次に特性曲線上で成立する式を導く . ここでは, 図 17.3 に示すような幾何学的にイメージし易い  $n=2$  の場合から始める<sup>6</sup> . Monge 錐の母線 (generating line) に沿ってその頂点からの距離を  $\sigma$  とすれば, 母線方向のベクトル  $(dx/d\sigma \ dy/d\sigma \ du/d\sigma)$  は解曲面の法線ベクトル  $(p \ q \ -1)$  と直交するから次式が得られる .

$$p(\lambda) \frac{dx}{d\sigma} + q(\lambda) \frac{dy}{d\sigma} = \frac{du}{d\sigma}$$

ただし  $\lambda$  は法線錐上に取られたパラメータである . ベクトル  $(p \ q \ -1)$  は法線 (normal) と同時に解曲面の接平面 (tangent plain) を表すものでもある . Monge 錐は接平面の包絡面であるからその母線上では次式が成立する<sup>7</sup> .

$$p'(\lambda) \frac{dx}{d\sigma} + q'(\lambda) \frac{dy}{d\sigma} = 0$$

他方, この場合の式 (17.8) を  $\lambda$  で微分すれば

$$F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0$$

<sup>6</sup> この図は,  $u$  一定面による切口が円形になる Monge 錐を先に与えその法線錐を計算で求め示したものである . 法線錐は Monge 錐と頂点を共有する 1 対の楕円錐で,  $u = -1$  面による切口は楕円または双曲線になる .

<sup>7</sup> Monge 錐が接平面の包絡面ということは,  $\lambda$  に対応する Monge 錐の母線が  $\lambda$  と  $\lambda + \Delta\lambda$  の二つの接平面の交線の,  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  のものということである . したがって包絡面の母線の式は交線が  $\lambda$  によらないものとして上式を  $\lambda$  で微分することによって得られる .

以上の3式から Monge 錐の母線の式が次のように導かれる．第2, 3式から  $dx : dy = F_p : F_q$  , この関係を第1式に用いれば

$$dx : dy : du = F_p : F_q : pF_p + qF_q$$

特性曲線はいたるところでその接線が特性錐の母線方向を取る曲線であるから，特性曲線の式は

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q, \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q \quad (17.9)$$

ただし  $s$  は特性曲線に沿って適切に取られたパラメータである．式(17.9)の最後の式はこの曲線に面を付加するもので成帯条件 (strip condition) といわれる．

この場合の式(17.8)を  $x$  で微分すれば

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u u_x + F_x = 0$$

式(17.9)の第1, 2式と  $q_x = p_y$  を用いれば

$$p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} + F_u p + F_x = 0$$

ひとつの積分曲面  $u = u(x, y)$  上では  $p, q$  は  $x, y$  の与えられた関数で， $dp/ds = p_x dx/ds + p_y dy/ds$  であるから

$$\frac{dp}{ds} + F_u p + F_x = 0$$

となる．同様に  $q$  の式も導かれる．上記の常微分方程式はまとめて式(17.8)の特性微分方程式系 (characteristic system of differential equations) と呼ばれる．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= F_p, & \frac{dy}{ds} &= F_q, & \frac{du}{ds} &= pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{ds} &= -(pF_u + F_x), & \frac{dq}{ds} &= -(qF_u + F_y) \end{aligned} \quad (17.10)$$

これら5つの式は5つの未知変数  $xyupq$  を含む決定系をなす．式(17.10)の解は一般に  $xyupq$  空間内の4パラメータ族の曲線になる．1つの曲線に沿って  $F$  を  $s$  で微分し式(17.10)を用いれば  $dF/ds = 0$  なる関係が得られ，これより1つの曲線に沿って  $F = \text{const.}$  となる．したがって微分方程式  $F = 0$  を満足する曲線は3パラメータ族存在することになる<sup>8</sup>．この曲線を特性帯 (characteritic strip) という．

3独立変数以上の場合にも同様に理論を展開することができ，式(17.8)の特性微分方程式系は下記のように  $n = 2$  の場合の式(17.10)を直接的に多次元に拡張したものになる．

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= F_{p_i}, & \frac{du}{ds} &= \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -(p_i F_u + F_{x_i}) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17.11)$$

<sup>8</sup> 見方をかえれば，2独立変数準線形の場合には  $xyu$  空間内に Monge 軸の焦曲線である特性曲線は2パラメータ族存在した．つまり一つの特性曲線をとって，1つのパラメータを変えればこの曲線が面をなし，それから残りのパラメータを変えれば特性曲線が  $xyu$  空間を覆った．非線形の場合には第3のパラメータが存在しこれを換えれば特性曲線が  $xyu$  空間内の各点でこの点を頂点に持つ一対の錐曲線体 (conoid) を描くことになり，第1, 2のパラメータを変えればこの錐曲線体が空間を覆うことになる．

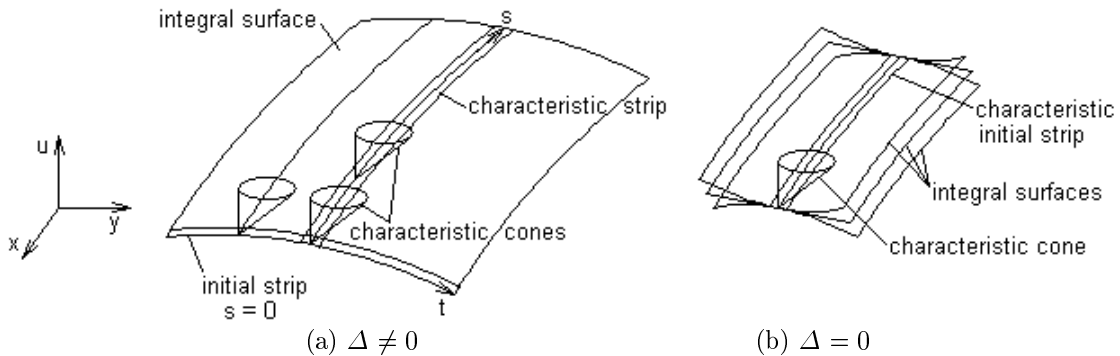


図 17.4: 2 独立変数 1 階非線形微分方程式の初期値問題

なお第 2 式は、特性曲線に接平面を付加し特性帯を作る成帯条件 (strip condition) である。特性帯は式 (17.11) の条件  $F = 0$  を満足する解で、特性帯は一つの解曲面  $u = u(x_i)$  に乗っている。

式 (17.8) は初期値問題として解かれる。 $n-1$  次元の初期多様体  $C$  上にパラメータ  $t_1, \dots, t_{n-1}$  を取り、 $C$  を  $t_i$  の関数  $x_1, \dots, x_n, u$  で与える。更に  $C$  上に微分方程式 (17.8) と成帯条件

$$\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1) \quad (17.12)$$

を満足するように  $t_i$  の関数  $p_1, \dots, p_n$  を与える。このとき  $C$  は帯多様体 (strip manifold)  $C_1$  になり、積分多様体 (integral manifold) と呼ばれる。この場合の初期値問題は  $C_1$  を含む式 (17.8) の解  $u = u(x_i)$  を見出す問題になる。 $C_1$  に沿って

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{p_1} & \dots & F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (17.13)$$

で定義される  $\Delta$  がゼロでない場合には、特性微分方程式系 (17.11) の初期値問題を解くことによって、積分多様体  $C_1$  の近傍に積分曲面

$$x_i(s, t_\nu), \quad u(s, t_\nu), \quad p_i(s, t_\nu)$$

を一意的に延長することができる。ただし  $s$  は特性曲線に沿って取られるパラメータで  $C_1$  上で 0 である。このようにして求めた解がもとの微分方程式 (17.8) を満足し、また  $p_i$  が  $\partial u / \partial x_i$  になることは容易に証明できる。この場合の初期多様体、解曲面と特性錐の関係は、3 次元の  $xyu$  空間では、図 17.4(a) に示すようになり、初期積分帯 (integral strip) は特性錐に接するように与えられ、また解曲面も特性錐に接するように求められることになる。

次に微分方程式 (17.8) と成帯条件 (17.12) を満足する初期多様体上のいたるところで特性条件  $\Delta = 0$  が成立する場合を考える。 $\Delta = 0$  ということは線形の関係

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = F_{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



が成立するということである．ただし  $\lambda_\nu(t_1, \dots, t_{n-1})$  は係数である．初期値  $u$  と  $p_i$  が

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = -(p_i F_u + F_{x_i}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

なる関係を満足するならば，この初期多様体は  $n-2$  パラメータ族の特性帯からなり，特性帯多様体と呼ばれる．初期多様体のいたるところで  $\Delta = 0$  の場合に，初期値問題が成立するための必要十分条件は，初期多様体が特性帯多様体であることで，このとき初期値問題の解は無数に存在することになる．3次元の  $xyu$  空間では，初期特性帯，解曲面，特性錐の関係は，図 17.4(b) のようになる．

以上述べた 2 独立変数準線形方程式の理論と 3 独立変数以上の非線形方程式の理論の間には次の対応関係がある．

2 独立変数準線形方程式 (17.6)	$n$ 独立変数非線形方程式 (17.8)
2 次元法線面	$n-1$ パラメータを持つ法線錐
Monge 軸	$n-1$ パラメータを持つ特性錐
初期曲線	$n-1$ 次元初期多様体
特性曲線 式 (17.7)	特性帯 式 (17.11)

ここで，3 独立変数以上の双曲型微分方程式の説明に戻る．特性方程式 (17.3) は  $\phi(x_0, x_1, \dots, x_n)$  の 1 階非線形微分方程式で，その解  $\phi = \text{const.} = c$  はもとの微分方程式系 (17.1) の特性面である． $n+1$  次元の空間内で，式 (17.3) の解は  $n-1$  パラメータ族の特性曲線によって作られる．この特性曲線は，演算子  $L$  に対して従特性 (bicharacteristic) または射線 (ray) と呼ばれる．従特性に  $\xi_i = D_i \phi$  の付加された従特性帯 (bicharacteristic strip) は，上記の 1 階非線形微分方程式の特性微分方程式系 (17.11) から導かれる次の常微分方程式系を満足する．式 (17.3) には  $u$  が陽に現れないから

$$\dot{x}_i = Q_{\xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = -Q_{x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (17.14)$$

ただし ‘ $\dot{\phantom{x}}$ ’ は射線に沿って適切に取られたパラメータに関する微分を意味する．

$xt$  空間内の一つの点  $O$  を頂点に持つ射線錐 (ray cone) を上記により作る．この射線錐は法線錐と双対的関係にある (図 17.5(a))．ここで再び  $x_0 = t$  を別扱する．前方の射線錐の  $t = 1$  面での切り口は射線面 (ray surface) と呼ばれる．この射線面は，点  $O$  の擾乱から  $t = 0$  に出た波の  $t = 1$  における波面を表している．このような波の一部分を平面波

$$\phi(x, t) = vt - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n = vt - \alpha \cdot x = 0$$

で近似する．ただし  $v$  はこの波の伝播の速さ， $\alpha$  は波面の単位法線ベクトルである． $\alpha$  が単位球面上を動くとき，ベクトル  $v\alpha$  は法線速度面を作り，また平面波  $v = \alpha \cdot x$  の包絡面は射線面を作る．射線面はまた法線面の接平面の単位球面に対する極の作る面でもある．2次元の場合の射線面，法線面，法線速度面の関係を図 17.5(b) に示す．

次に 2 次元の場合の具体例を 2 つ示す．第 1 の例は射線面がひとつの点  $(a, 0)$  の場合である．法線速度面はひとつの円  $x_v = a(1 + \cos \theta)/2$ ， $y_v = a(\sin \theta)/2$ ， $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$  になり，法線面は  $y$  軸に平行な線

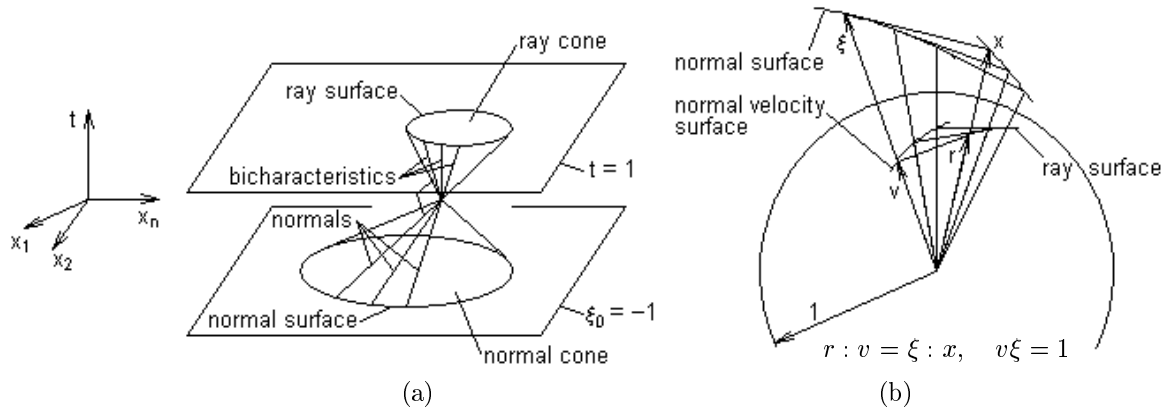
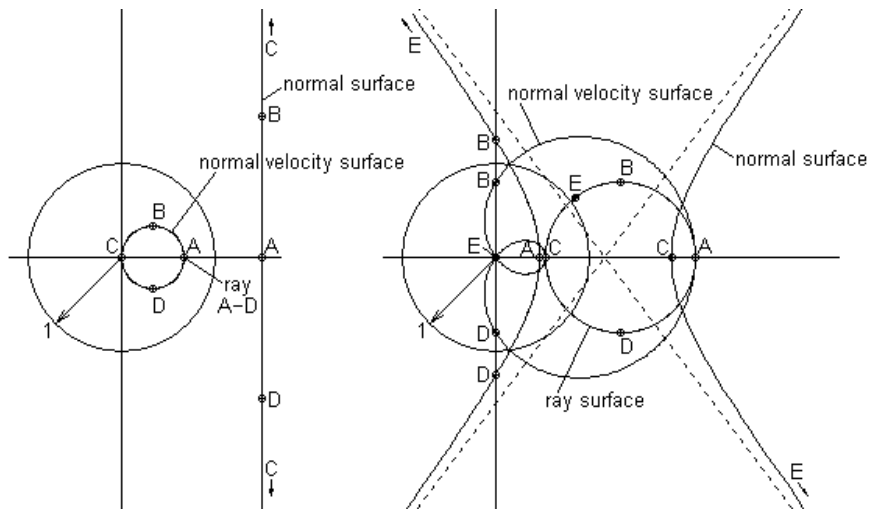


図 17.5: 法線面，射線面，法線速度面

$x = 1/a$  になる．図中の ABCD は対応する点を示す．第 2 の例は射線面が円でその一部が単位円の外に出る場合である． $x_r = a + r \cos \theta$ ,  $y_r = r \sin \theta$ , ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ )．法線速度面は  $x_v = (r + a \cos \theta) \cos \theta$ ,  $y_v = (r + a \cos \theta) \sin \theta$ , また法線面は  $xyt$  空間内の法線錐（一対のだ円錐）を  $t = -1$  平面で切断したときに現れる双曲線  $\xi = \cos \theta / (r + a \cos \theta)$ ,  $\eta = \sin \theta / (r + a \cos \theta)$  になる<sup>9</sup>．擾乱は一般に  $xt$  空間内の特性面に沿って伝播する．今 3 次元  $x$  空間を考えれば，ある瞬間の波面は 2 次元の面で，単位時間後の波面はその瞬間の波面上の各点で射線面を作り，これらの射線面の包絡面として求めることができる (図 17.6, 波面の Huyghens 構成)<sup>10</sup>．



<sup>9</sup> この双曲線の式を通常ように

$$\frac{(x-C)^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

で表せば係数  $A, B, C$  と漸近線の式は

$$A = \frac{r}{a^2 - r^2}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad C = \frac{a}{a^2 - r^2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} (x - C)$$

<sup>10</sup> 射線錐の一部が凹面になっている場合には，Huyghens 構成はこれによる窪みを接平面で補正した凸殻錐 (convex hull cone) の射線面に対して行われる．

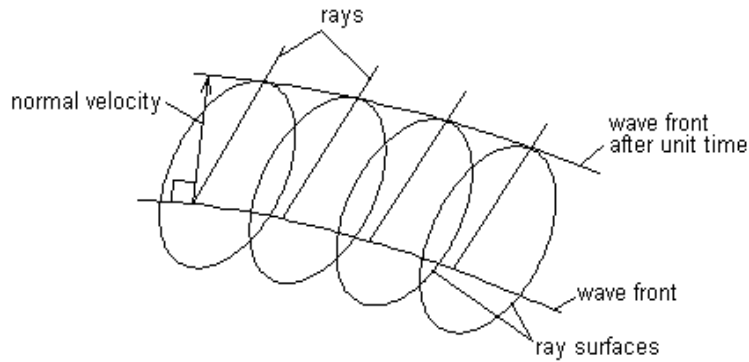


図 17.6: 波面の Huyghens 構成

### 17.1.3 演算子 $LL$

微分方程式 (17.1) の演算子  $L$  は、式 (17.2c) の行列  $A$  が対称のときには、 $A$  が正定値 (positive definite) ならば双曲型である。ここでは  $L$  が双曲型であるための条件を幾何学的に法線錐を使って説明する。図 17.7 に示すような、 $xt$  空間内の点  $O$  に頂点を持つ法線錐  $Q(\xi) = 0$  と点  $O$  を通るベクトル  $\zeta$  を考える。この  $\zeta$  を含むすべての 2 次元平面  $\pi$  が法線錐と  $k$  個の異なる線で交わるものとする。このようなベクトル  $\zeta$  が存在すれば式 (17.1) の演算子  $L$  は点  $O$  で双曲型である<sup>11</sup>。このようなベクトルを擬時間方向 (time-like direction) という。この双曲型の定義を代数的に定義し直せば次のようになる。点  $O$  を通り法線錐に交叉しない  $n$  次元の面を擬空間面 (space-like surface) という。この面内にベクトル  $\beta$  を取る。 $L$  が双曲型るときには  $\zeta$  と平行な線  $\xi = \lambda\zeta + \beta$  ( $\lambda$  はパラメータ) は法線錐と一般に  $k$  個の異なる点で交叉する (図参照)。したがって  $\lambda$  の式

$$Q(\lambda\zeta + \beta) = 0$$

が  $k$  個の異なる実根  $\lambda$  を持つときに  $L$  は双曲型である (脚注参照)。

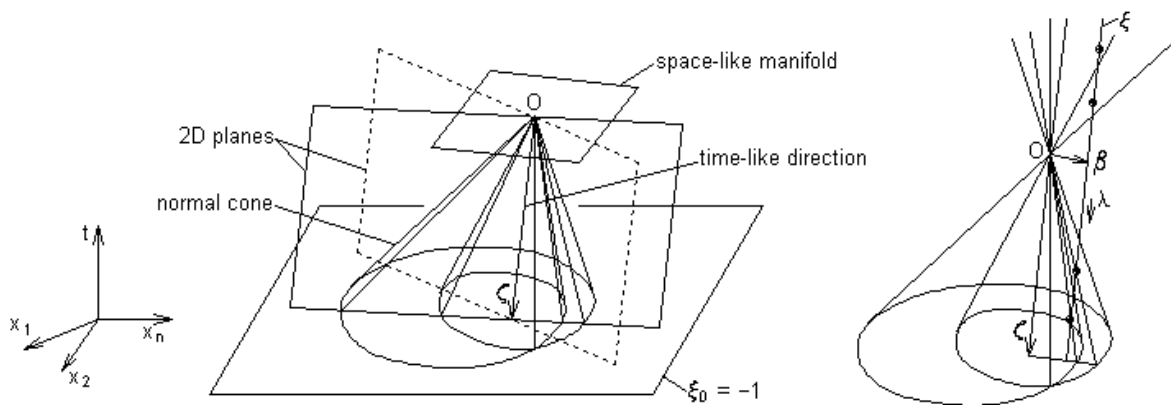


図 17.7: 双曲型微分方程式の幾何学的定義

<sup>11</sup> 法線錐が図のように交叉しているところ、接しているところ、完全に重なっている場合には交線の数はその分だけ少なくなる。

式 (17.3) の成立する特性面上では，行列  $A$  に対し

$$lA = 0, \quad Ar = 0 \quad (17.15)$$

を満足する左ナルベクトル  $l$  と右ナルベクトル  $r$  が存在する<sup>12</sup>．演算子  $lL$  は式 (17.2c) を参照すれば

$$lL = l \sum_{i=0}^n A^i D_i = l \sum_{i=0}^n A^i \left( \xi_i \frac{\partial}{\partial \phi} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \right) = l \sum_{i=0}^n A^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \quad (17.16)$$

のように書換えることができる． $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は特性面内の座標であるから，演算子  $lL$  は特性面の内微分であることが分かる．微分方程式  $L[u] = 0$  に  $l$  を左から演算すれば，特性面の内微分のみを含む見通しの良い方程式が得られる．

本節の始めに述べたように  $n+1$  次元空間の特性条件は  $Q(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ ，また  $x_0 = t$ ， $\xi_0 = -1$ ， $A^0 = I$  ( $I$  は単位行列) で，式 (17.1) が

$$L[u] = u_t + \sum_{i=1}^n A^i D_i u = f \quad (17.17)$$

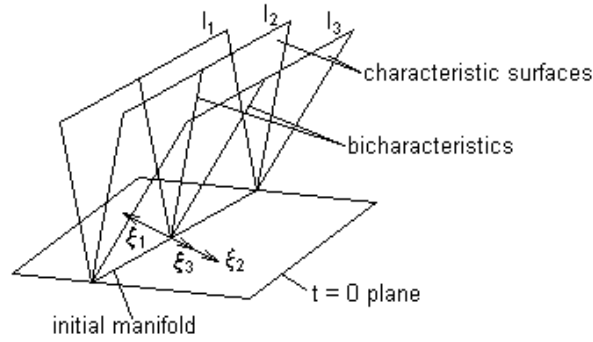
のように書かれる  $n$  次元空間では，特性条件は  $Q(-1, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$  である．更に単位法線ベクトル  $\alpha = \xi/|\xi|$  に対しては  $Q(-|v|, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ ，また法線速度  $v = \xi/\xi^2$  に対しては  $Q(-1, v_1/v^2, \dots, v_n/v^2) = 0$  である．ただしここでの  $\xi$  は  $n$  次元空間のもので  $\xi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ．単位法線ベクトル  $\alpha$  で表された特性条件は具体的に書けば次のようになる．

$$\left| \begin{array}{cccc} \tilde{A} - |v|I & & & \\ a_{11}^1 \alpha_1 + \dots + a_{11}^n \alpha_n - |v| & a_{12}^1 \alpha_1 + \dots + a_{12}^n \alpha_n & \dots & a_{1k}^1 \alpha_1 + \dots + a_{1k}^n \alpha_n \\ a_{21}^1 \alpha_1 + \dots + a_{21}^n \alpha_n & a_{22}^1 \alpha_1 + \dots + a_{22}^n \alpha_n - |v| & \dots & a_{2k}^1 \alpha_1 + \dots + a_{2k}^n \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}^1 \alpha_1 + \dots + a_{k1}^n \alpha_n & a_{k2}^1 \alpha_1 + \dots + a_{k2}^n \alpha_n & \dots & a_{kk}^1 \alpha_1 + \dots + a_{kk}^n \alpha_n - |v| \end{array} \right| = 0 \quad (17.18)$$

ただし  $\tilde{A} = \sum_{i=1}^n A^i \alpha_i$  である．したがって  $|v|$  は行列  $\tilde{A}$  の固有値，またナルベクトル  $l$  と  $r$  は  $\tilde{A}$  の固有ベクトルである．

$xt$  空間内の初期面  $t = 0$  内に  $n-1$  次元の初期多様体を取り，この多様体を含む  $n$  次元の特性面を初期面の近傍に延長する (下図参照)．ここでは初期多様体上の擾乱がこれらの特性面上を波となって伝播する問題を考える．初期多様体を  $\psi(x) = 0$  とすれば，その法線ベクトルは  $\xi = \nabla \psi$ ，単位法線ベクトルは  $\alpha_i = \xi_i/|\xi|$  となる．双曲型演算子  $L$  に対しては，この多様体上で  $\tilde{A}$  が式 (17.18) より， $k$  個の固有値  $|v^1|, \dots, |v^k|$  (重根含む) とこれらに対応する  $k$  個の 1 次独立の固有ベクトル  $l^1, \dots, l^k$  を持つことになる．初期多様体上の擾乱は，一般に  $k$  個の特性面上を，法線速度  $v^k$  の波となって伝播する．各波の式は微分方程式 (17.17) の左から固有ベクトル  $l^k$  を演算することによって求められる．これらの式は特性面内の微分すなわち通常  $\kappa$

<sup>12</sup> 特性面上で  $|A| = 0$  ということは，幾何学的に解釈すれば， $k$  次元の  $u$  空間において  $A$  を構成する  $k$  個の列ベクトルまたは行ベクトルが  $k$  次元空間を張るのではなく  $k-1$  次元の面内にあるということである．それゆえこの面に直交するナルベクトル，すなわち  $A$  を構成するすべての列ベクトルとのスカラー積がゼロになる行ベクトル  $l$ ，すべての行ベクトルとのスカラー積がゼロになる列ベクトル  $r$  が存在することになる．なお当然ながら更に  $A$  を構成する  $k$  箇のベクトルが  $k-m$  次元多様体内にあるときには，この多様体に直交する  $m$  箇の独立のベクトルを多様体の外に取ることができる．



番めの従特性に沿う微分と  $\alpha$  方向の局所平面波に沿う (初期多様体方向) 微分を含み、従特性に沿って初期値問題として解かれる。なお、式 (17.18) を因子に分解したときに  $m$  個の因子が同じで  $v^k$  が  $m$  重根のときには、この  $m$  重固有値に対応して 1 次独立の固有ベクトル  $l^1, \dots, l^m$  が存在し、 $m$  重特性面に沿って  $m$  個の波が同じ法線速度  $v^k$  で伝播することになる。

まず、行列  $A$  のランクが  $k-1$  の特性面の場合には、ナルベクトル  $l$  と  $r$  は大きさは任意に取れるが 1 つずつ決まる。 $lAr = 0$  を従特性に沿って微分すれば、 $\dot{l}Ar = lAr = 0$ 、また式 (17.2c) から  $\partial A / \partial \xi_\nu = A^\nu$  であるから

$$l\dot{A}r = \sum_{\nu=0}^n lA^\nu r \dot{\xi}_\nu = 0$$

他方、 $Q(\xi) = 0$  を従特性に沿って微分すれば、

$$\sum_{\nu=0}^n Q_{\xi_\nu} \dot{\xi}_\nu = 0$$

以上の二つの関係は  $\dot{\xi}_\nu$  によらず成立するから、 $lA^\nu r$  と  $\partial Q / \partial \xi_\nu$  は比例関係にある。式 (17.14) の従特性を求める式を用いれば次の関係が導かれる。

$$\dot{x}_\nu = lA^\nu r \quad (\nu = 0, 1, \dots, n) \quad (17.19)$$

ただし、 $\dot{\phantom{x}}$  は従特性に沿って適切に取られたパラメータに関する微分を示す。

次に  $A$  のランクが  $k-m$  の  $m$  重特性面の場合には、1 次独立のナルベクトル  $l^1, \dots, l^m; r^1, \dots, r^m$  が存在する。上と同様に  $l^j A r^i = 0$  を従特性に沿って微分すれば

$$l^j A^0 r^i \dot{\xi}_0 + \sum_{\nu=1}^n l^j A^\nu r^i \dot{\xi}_\nu = 0$$

他方、 $Q(\xi) = \xi_0 + \tilde{Q}(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$  を従特性に沿って微分すれば、

$$\dot{\xi}_0 + \sum_{\nu=1}^n \tilde{Q}_{\xi_\nu} \dot{\xi}_\nu = 0$$

これらの関係も  $\dot{\xi}_\nu$  によらず成立するから、式 (17.14) を用いれば次の関係が導かれる。

$$\frac{\dot{x}_\nu}{\dot{x}_0} = \frac{l^j A^\nu r^i}{l^j A^0 r^i} \quad (i, j = 1, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (17.20)$$

## 17.1.4 特性面に沿う不連続の伝播

この節の始めの項で述べたように，無拘束の面  $\phi(x) = 0$  上で  $u_\phi$  が微分方程式から一意的に決まることは，この面を横切って  $u_\phi$  が常に連続になることを示している．これに対し，特性面  $\phi(x) = 0$  上では， $u_\phi$  が一意的に決まらないので，この面を横切って  $u$  は連続になるが， $u_\phi$  更には  $u_{\phi\phi}$  等の微分は必ずしも連続にはならない．以下には特性面を横切って  $u_\phi$  が不連続になる場合について述べる．微分方程式は準線形であるからここでは右辺  $f = 0$  として議論を進める．ある特性面を横切った  $a$  の跳躍 (jump) を  $[a]$  で表せば，

$$[L[u]] = \sum_{i=0}^n A^i [D_i u] = \sum_{i=0}^n A^i \xi_i [u_\phi] = A[u_\phi] = 0$$

他方 行列  $A$  のランクが  $k-1$  のときには， $Ar = 0$  を満足するナルベクトル  $r$  は一意的に決まるので，上式と比較すれば，

$$[u_\phi] \equiv g = \sigma r \quad (17.21)$$

のように置くことができる．ここに  $\sigma$  は跳躍の大きさを示すスカラー量である．

特性面  $\phi = 0$  を横切って関数の微分  $u_\phi$  が不連続になる場合には，その近傍で  $u(x, t)$  は次のように置くことができる (下図参照<sup>13</sup>)．

$$u(x, t) = h(\phi)g\phi + \tilde{u}(x, t) \quad (17.22)$$

ただし， $\tilde{u}$  は連続関数，また  $h$  は Heaviside 関数で

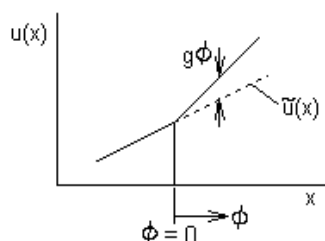
$$h(\phi) = \begin{cases} 1 & (\phi \geq 0) \\ 0 & (\phi < 0) \end{cases}$$

次にこの不連続の特性面に沿ったの伝播について考える． $u$  に演算子  $lL$  を作用させれば，

$$lL[u] = hlL[g]\phi + hlL[\phi]g + lL[\tilde{u}] = 0$$

この式の中辺第 2 項は  $lL$  が  $\phi = 0$  面内の演算子であるから 0，また第 3 項も  $\tilde{u}$  が  $\phi = 0$  を横切って連続であるから無視される<sup>14</sup>．したがって

$$lL[g] = lL[\sigma]r + lL[r]\sigma = 0$$



<sup>13</sup>  $u(x)$  はベクトル量で図はそのふるまいを象徴的に示したものである．

<sup>14</sup> ここでは不連続面  $\phi = 0$  であるが，不連続面  $\phi = \phi_0$ ， $h = 1$  ( $\phi \geq \phi_0$ )， $= 0$  ( $\phi < \phi_0$ )， $u = hg(\phi - \phi_0) + \tilde{u}$  の一般の場合にもこの議論は成立する．

右辺第 1 項に関しては, 式 (17.1a) より  $L[\sigma] = \sum A^i D_i \sigma$ , 式 (17.19) より  $lA^i r = \dot{x}_i$ , また  $\sum \dot{x}_i D_i \sigma = \dot{\sigma}$ .  
これより跳躍の大きさ  $\sigma$  は従特性に沿って次式により伝播することが分かる.

$$lL[g] = \dot{\sigma} + lL[r]\sigma = 0 \quad (17.23)$$

次に特性面  $\phi = 0$  を横切って関数  $u$  が自身を含めて不連続になる より一般的な場合を考え,  $u(x, t)$  を次のように置く.

$$u(x, t) = DW(\phi) g^0(x, t) + W(\phi) g^1(x, t) + D^{-1}W(\phi) g^2(x, t) + \cdots + \tilde{u}(x, t) \quad (17.24)$$

ただし  $DW(\phi) = h(\phi)$ ,  $W(\phi) = h(\phi)\phi$ ,  $D^{-1}W(\phi) = h(\phi)\phi^2$ ,  $\dots$ . また  $g^0, g^1, g^2, \dots, \tilde{u}$  は連続関数のベクトルである.

$$L[u] = \delta A g^0 + h(L[g^0] + A g^1) + h\phi(L[g^1] + A g^2) + \cdots + L[\tilde{u}] = 0$$

$\delta(\phi) = D^2W(\phi)$  は Dirac のデルタ関数. この式が成立するためには次の一連の関係が満足されなければならない.

$$A g^0 = 0, \quad (17.25a)$$

$$L[g^0] + A g^1 = 0, \quad (17.25b)$$

$$L[g^1] + A g^2 = 0, \quad (17.25c)$$

$\dots$

式 (17.25a) から特性上で式 (17.21) と同様の関係  $g^0 = \sigma_0 r$  が成立することになり, また式 (17.25b) から  $lL[g^0] = 0$ , したがって式 (17.23) と同様の  $\sigma_0$  の従特性に沿っての伝播の式  $lL[g^0] = \dot{\sigma}_0 + lL[r]\sigma_0 = 0$  が導かれる. また式 (17.25b) は  $A(g^1 + A^{-1}L[g^0]) = 0$  のように書くことができるから  $g^1$  は次のように置くことができる.

$$g^1 = \sigma_1 r + h^1 \quad (17.26)$$

ただし  $h^1 = -A^{-1}L[g^0]$ . また式 (17.25c) から

$$lL[g^1] = \dot{\sigma}_1 + lL[r]\sigma_1 + lL[h^1] = 0 \quad (17.27)$$

以下同様にして, 従特性に沿って伝播する不連続の大きさ  $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots$  の式を導くことができる. これらの式を積分すれば跳躍量  $g^0, g^1, g^2, \dots$  を次々に決定することができる.

また,  $\phi = 0$  が  $m$  重特性面の場合には, この面を横切ったの不連続量は

$$g = \sum_{i=1}^m \sigma_i r^i \quad (17.28)$$

と置くことができる. ただし  $r^1, \dots, r^m$  は 1 次独立な右ナルベクトル,  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  は不連続の大きさを示す量である.

$$l^j L[g] = l^j \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\nu=0}^n A^\nu r^i D_\nu \sigma_i + L[r^i] \sigma_i \right\} = 0$$

式 (17.20) を用いれば,

$$\sum_{i=1}^m (\dot{\sigma}_i + l^j L[r^i] \sigma_i) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (17.29)$$

$\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) はこの連立常微分方程式から求めることができる.

以上この節では,  $xt$  空間内の初期面  $t = 0$  上にある  $n-1$  次元多様体  $\psi(x, 0) = 0$  に  $u$  の不連続 (擾乱) があるときに, この不連続は  $k$  個の波となって初期多様体を含む  $k$  個の特性面  $\phi^\kappa(x, t) = 0$  に沿って伝播すること, ただしこれらの各特性面上の一部は重なっていることもあることを述べた. それから各特性面上を伝播する不連続量  $g^\kappa(x, t)$  の式 (17.21)(17.23)(17.26)–(17.29) を示した. 以下にはこれらの方程式の初期値問題を完成させるために, 初期多様体内の不連続量  $g(x, 0)$  が, 特性面上の不連続量の初期値  $g^\kappa(x, 0)$  にどのように分割されるのかについて述べる. 初期面上の  $u(x, 0)$  を式 (17.24) にならって一般性を持たせ次のように置く.

$$u(x, 0) = DW(\psi) g^0(x, 0) + W(\psi) g^1(x, 0) + D^{-1}W(\psi) g^2(x, 0) + \dots + \tilde{u}(x, 0) \quad (17.30)$$

ただし  $DW(\psi) = h(\psi)$ ,  $W(\psi) = h(\psi)\psi$ ,  $D^{-1}W(\psi) = h(\psi)\psi^2$ ,  $\dots$ . これらの不連続の各レベルに対し,  $g^\kappa(x, 0)$  の和は  $g(x, 0)$  に等しくなるべきであるから, 次式が導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^k \sigma_0^\kappa(x, 0) r^\kappa(x, 0) &= g^0(x, 0) \\ \sum_{\kappa=1}^k \sigma_1^\kappa(x, 0) r^\kappa(x, 0) &= g^1(x, 0) - \sum_{\kappa=1}^k h^{1\kappa}(x, 0) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (17.31)$$

ただし  $h^{1\kappa}(x, 0) = -A^{-1}L[\sigma_0^\kappa(x, 0)r^\kappa(x, 0)]$ . たとえば第 1 式は,  $k$  個の未知変数  $\sigma_0^\kappa(x, 0)$  を持つ  $k$  個の式からなる連立 1 次方程式で, これから各特性面に沿って伝播する不連続量の大きさの初期値  $\sigma_0^\kappa(x, 0)$  を一意的に決定することができる.

双曲型微分方程式  $L[u] = f$  で支配される場においては,  $xt$  空間内の 1 つの点  $O$  の関数  $u$  の値は点  $O$  に頂点を持ち過去に広がる射線錐体 (ray conoid) 内のデータのみによって決まる. この錐体内の領域は依存域 (domain of dependence) と呼ばれる. また点  $O$  の  $u$  の値は点  $O$  に頂点を持ち未来に広がる射線錐体内の  $u$  のみに影響を及ぼす. この錐体内の領域は影響域 (domain of influence) と呼ばれる. ある時間  $t$  における領域  $G$  内の関数  $u$  の値は, この  $G$  の境界  $\Gamma$  上の各点から過去に広がる射線錐体の外側包絡面内のデータのみによって決まる. 領域  $G$  の影響域についても同様のことがいえる. 流れの亜音速域では境界の形状や条件の不連続性は数学的には領域の内部に及ばない. これに対し超音速域ではこれらの不連続性によって領域内部の流れも不連続性を持つことになる. 不連続性を持つ流れにあってはテイラー級数の収束を前提とする差分式の精度は意味をなさなくなる. 流れの数値解析では一般に 2 次ないし 3 次精度の差分式で十分で, より高次の差分式の使用は弱い不連続の計算など特別の場合に限られる.



## 17.1.5 非定常圧縮性等エントロピー流れへの応用

この流れの基礎方程式は、非保存形では次のように書かれる（保存形方程式も、通常 特性の理論を適用する前に非保存形に書換えられる）。

$$\begin{aligned} d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \rho d\mathbf{u}/dt + \nabla p &= 0 \\ ds/dt &= 0 \end{aligned}$$

ただし  $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  は流跡線に沿う内微分である。第 3 式は流跡線に沿ってエントロピーが保存されることを表し、これより等エントロピー流れの関係式

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt} = 0 \quad (17.32)$$

が流跡線に沿って成立することになり、この流れの方程式は次の  $\mathbf{u}, p$  を未知変数とする方程式系になる。

$$\rho d\mathbf{u}/dt + \nabla p = 0 \quad (17.33a)$$

$$dp/dt + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (17.33b)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \rho d/dt & 0 & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \rho d/dt & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & \rho d/dt & \partial/\partial z \\ \rho c^2 \partial/\partial x & \rho c^2 \partial/\partial y & \rho c^2 \partial/\partial z & \partial/\partial t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = 0 \quad (17.33c)$$

ここで面  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$  を考え、

$$V \equiv \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta$$

と置く。  $\phi = 0$  が特性面ならば、特性条件が式 (17.3) と (17.33) から次のように求められる。

$$Q(\xi, \tau) = \begin{vmatrix} \rho V & 0 & 0 & \xi \\ 0 & \rho V & 0 & \eta \\ 0 & 0 & \rho V & \zeta \\ \rho c^2 \xi & \rho c^2 \eta & \rho c^2 \zeta & V \end{vmatrix} = V^2 \{V^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\} = 0$$

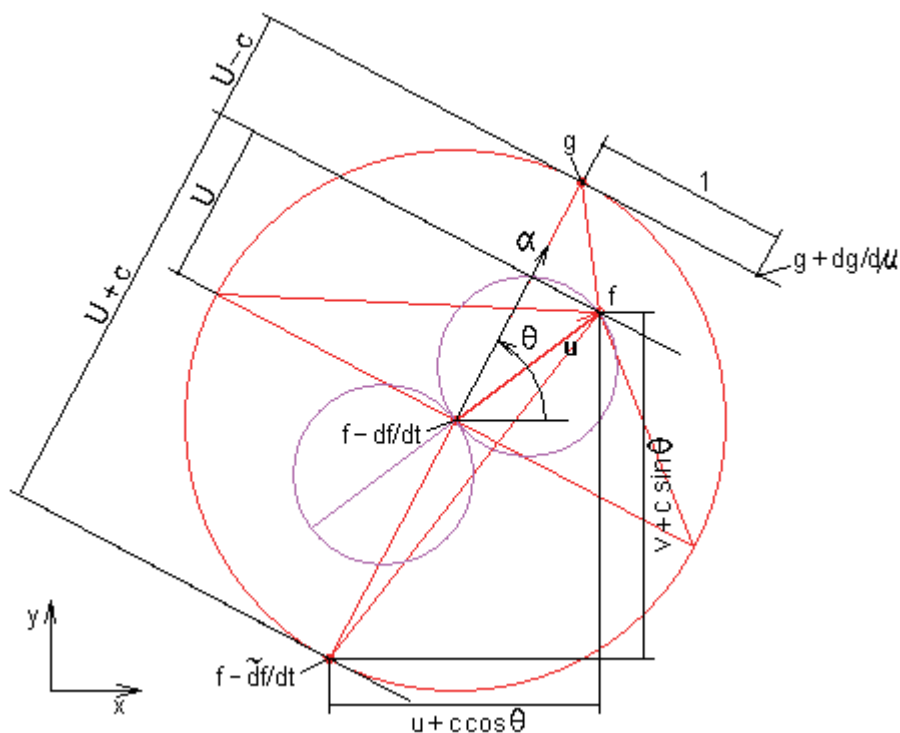
これより次の 2 つの波の式が得られる。

$$(i) \quad V = 0 \quad (17.34a)$$

$$(ii) \quad V^2 - c^2 \xi^2 = 0 \quad (17.34b)$$

$V = 0$  の法線錐は、 $\xi\tau$  空間の原点を通る平面である。これに対応する射線錐は式 (17.14) から

$$dx : dy : dz : dt = u : v : w : 1$$



となり,  $xt$  空間内の流跡線になる<sup>15</sup>. すなわち法線錐の式 (17.34a) は流跡線に沿って伝播するエントロピー波のものになる.

式 (17.34b) は 2 次の法線錐を表している. これに対応する射線錐の式は

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - w\right)^2 = c^2 \quad (17.35)$$

となる<sup>16</sup>. これより  $t = 1$  の射線面の式は  $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = c^2$  となり,  $\mathbf{u}$  に中心を持つ半径  $c$  の球になる. 射線錐は流跡線上の擾乱から音速で広がる圧力波 (acoustic waves) のものになる. 流線上のある点からこのような圧力波が連続に放出されるときに圧力波の包絡面はマッハ錐 (Mach cone) を形成する.

次に 2 次元の場合を考える. 式 (17.33c) から式 (17.18) に相当の式は次のようになる.

$$\begin{vmatrix} U - \lambda & 0 & \rho^{-1} \cos \theta \\ 0 & U - \lambda & \rho^{-1} \sin \theta \\ \rho c^2 \cos \theta & \rho c^2 \sin \theta & U - \lambda \end{vmatrix} = (U - \lambda) \{ (U - \lambda)^2 - c^2 \} = 0 \quad (17.36)$$

ただし  $\alpha = (\cos \theta \quad \sin \theta)$  は波面の単位法線ベクトルで  $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$ , また  $U = u \cos \theta + v \sin \theta$  は流速  $\mathbf{u}$  の  $\alpha$  方向成分である (上図参照). 式 (17.36) より一つの波面の固有値とそれに対応する左固有ベク

<sup>15</sup> 式 (17.14) と (17.34a) から

$$dx/dt = Q_\xi / Q_\tau = V_\xi / V_\tau = u$$

<sup>16</sup> 式 (17.14) と (17.34b) から

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_\xi}{Q_\tau} = u - \frac{c^2 \xi}{V}, \quad \left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 = \frac{c^4 \xi^2}{V^2} = \frac{c^2 \xi^2}{\xi^2}$$

トルは<sup>17</sup>

$$\lambda^1 = U, \quad l^1 = (\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0)$$

したがって

$$l^1 L[u] = \left( \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} p_x \right) \sin \theta - \left( \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} p_y \right) \cos \theta = 0$$

これを書換えれば

$$\frac{du}{dt} \sin \theta - \frac{dv}{dt} \cos \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\mu} \quad (17.37)$$

ただし  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$  は流跡線に沿う微分,  $d/d\mu = \sin \theta \partial/\partial x - \cos \theta \partial/\partial y$  は  $t = \text{const.}$  面内の波面に沿う微分である.

残り二つの波の固有値と左固有ベクトルは

$$\lambda^i = U \pm c: \quad l^i = (\cos \theta \quad \sin \theta \quad \pm 1/\rho c) \quad (i = 2, 3)$$

ただし,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  に取れば, 複合は+のみで良いことになる.

$$l^i L[u] = \left( \frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} p_x \right) \cos \theta - \left( \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} p_y \right) \sin \theta + \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} + c(u_x + v_y) = 0$$

これを書換えれば

$$\frac{1}{\rho c} \frac{\tilde{d}p}{dt} + \frac{\tilde{d}u}{dt} \cos \theta + \frac{\tilde{d}v}{dt} \sin \theta = -c \left( \frac{du}{d\mu} \sin \theta - \frac{dv}{d\mu} \cos \theta \right) \quad (17.38)$$

ただし  $\tilde{d}/dt = \partial/\partial t + (u + c \cos \theta)\partial/\partial x + (v + c \sin \theta)\partial/\partial y$  は圧力波の射線錐の従特性に沿う微分である.  $d/d\mu$  は上と同じ定義である.

式 (17.32) と (17.37)(17.38) は適合方程式 (compatibility equations) とも言われ, 前章の 2 独立変数の場合の式 (16.24) に相当の式である. 式 (16.24) は常微分方程式で, 図に示す格子特性法などにより解を求めることができた. しかし 3 独立変数の式 (17.38) は, 従特性に沿う微分演算子のほかに波面に沿う微分  $d/d\mu$  も含み, また波面の方向  $\theta$  を変えることによって無数の式を作ることができる. そのため この式は 2 独立変数の式 (16.24) ほど決定的意味を持つものではないとも言われてきた. 3 独立変数の特性の方法も数多く提案されている. その中で図 17.8 に示すように, 点 O を通る流跡線と射線錐体上の 4 つの適合方程式を用いる従特性法は標準的なものである.

<sup>17</sup> 左固有ベクトルを求める式は式 (17.36) より

$$(l_1 \quad l_2 \quad l_3) \begin{pmatrix} U - \lambda & 0 & \rho^{-1} \cos \theta \\ 0 & U - \lambda & \rho^{-1} \sin \theta \\ \rho c^2 \cos \theta & \rho c^2 \sin \theta & U - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

この式に固有値  $\lambda = \lambda^1 = u \cos \theta + v \sin \theta$  を入れ,  $(l_1 \quad l_2 \quad l_3) = (l_1^1 \quad l_2^1 \quad l_3^1)$  と置けば

$$(l_1^1 \quad l_2^1 \quad l_3^1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} \cos \theta \\ 0 & 0 & \rho^{-1} \sin \theta \\ \rho c^2 \cos \theta & \rho c^2 \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = 0$$

左固有ベクトルと行列の第 1 列, 第 2 列のスカラー積が 0 になるためには固有ベクトルの第 3 成分  $l_3^1 = 0$ , 第 3 列から  $l_1^1 = \sin \theta$ ,  $l_2^1 = -\cos \theta$ . 固有ベクトルはある任意性を持ち簡単なものにとる.

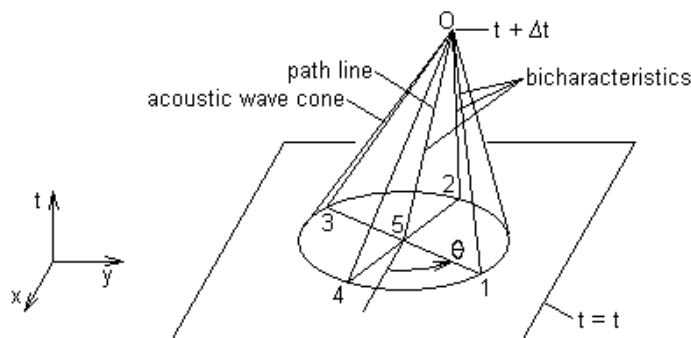


図 17.8: 従特性法

### 17.1.6 電磁流体力学への応用

圧縮性流れにおいて、流跡線に沿ってエントロピーが保存され圧力波がマッハ錐を形成することは、特性の理論をまつまでもなく周知のことである。電磁流体力学は本章の範囲外であるが、特性の理論によってはじめてその全貌が明らかになる例としてここに取上げることにする。磁場の作用するプラズマ流を扱う電磁流体力学 (MHD, magnetohydrodynamics) の基礎方程式は次の Maxwell の式と Euler 方程式である。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (17.39a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (17.39b)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{D}_t, \quad (17.39c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t, \quad (17.39d)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (17.39e)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (17.39f)$$

ただし記号は通常使われているもので  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  は電束密度と磁束密度,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  は電場と磁場の強さ,  $\mathbf{j}$  は電流密度である。なお  $\rho_e$ ,  $\mathbf{D}_t$ ,  $-\mathbf{B}_t$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  は電荷密度, 変位電流, Faraday 起電力, Lorentz 力である。また Ohm の法則, 電束密度, 磁束密度は次のようになる。

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (17.40a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (17.40b)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (17.40c)$$

ただし  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  は導電率 (conductivity), 誘電率 (permittivity), 透磁率 (permeability) である。式 (17.39) は上から, 電場の保存, 磁場の保存, Faraday の法則, Ampere の法則, 質量の保存, Euler の式である。なお上記の Maxwell の式はもともとの式とはやや異なり光速に関する項が省かれている。

次に電磁流体力学の方程式系を導く。式 (17.39c) において変位電流は十分小さいものとして無視し, 式 (17.40) の第 2 式を用いれば,

$$\mu \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$$

また Ohm の法則で導電率が十分大きいものとすれば ,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

これらの MHD 近似を用いれば , 式 (17.39) から次の  $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}$  の方程式系が導かれる .

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{17.41a}$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{17.41b}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p - \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \tag{17.41c}$$

$$\mathbf{B}_t - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{17.41d}$$

なお第 1 式は初期条件として用いられるものである<sup>18</sup> .

まず非圧縮性流れの場合について述べる . 上式に

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla B^2$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{B}$$

なる関係を用いれば次の非圧縮性 MHD の方程式系が得られる .

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{17.42a}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \left( p + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) - \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0 \tag{17.42b}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \tag{17.42c}$$

ここで特性面  $\phi(x, t) = 0$  を考え ,

$$V \equiv \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \tau + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3$$

のように置く . 特性条件は式 (17.42) から次のようになる .

$$Q(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mu \xi_1 & \mu \rho V & 0 & 0 & B_1 \xi_1 - \mathbf{B} \cdot \xi & B_2 \xi_1 & B_3 \xi_1 \\ \mu \xi_2 & 0 & \mu \rho V & 0 & B_1 \xi_2 & B_2 \xi_2 - \mathbf{B} \cdot \xi & B_3 \xi_2 \\ \mu \xi_3 & 0 & 0 & \mu \rho V & B_1 \xi_3 & B_2 \xi_3 & B_3 \xi_3 - \mathbf{B} \cdot \xi \\ 0 & -\mathbf{B} \cdot \xi & 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{B} \cdot \xi & 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{B} \cdot \xi & 0 & 0 & V \end{vmatrix} = 0$$

<sup>18</sup>任意ベクトル  $\mathbf{a}$  に対し  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$  であるから , 最後の式は  $\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})/\partial t = 0$  となり , 磁場の初期値が条件 (17.41a) を満足するように与えられればその磁場は常にこの条件を満足することになる .

この行列式を計算すれば<sup>19</sup>,  $\xi \neq 0$  であるから

$$V\{\mu\rho V^2 - (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\}^2 = 0 \quad (17.43)$$

ここで流れに乗って移動する座標系を用いることにすれば  $V = \tau$ , また  $b = |\mathbf{B}|(\mu\rho)^{-1/2}$  で定義される Alfvén 速度を導入すれば上式は次のようになる.

$$\tau\{\tau^2 - (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\}^2 = 0$$

これより

$$(i) \text{ エントロピー波: } \tau = 0 \quad (17.44a)$$

$$(ii) \text{ Alfvén 波: } \tau^2 - (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 = 0 \quad (17.44b)$$

第 1 式はこの座標系の流跡線に沿って伝播するエントロピー波を表している. また第 2 式はアルヴェン (Alfvén) 波と呼ばれるもので, 以下これについて簡単に説明する.

Alfvén 波の法線面, 法線速度面, 射線面は,  $\mathbf{B}$  方向の座標  $\xi_1$  に関し軸対称である. 法線面は, 極座標  $r, \theta$  を用いれば式 (17.44b) から  $1 - (br \cos \theta)^2 = 0$ ,  $\xi_1 = r \cos \theta = \pm 1/b$  となり,  $\xi_1$  軸に垂直な 2 つの平面になる. 法線速度面は  $r = \pm b \cos \theta$  となり, 座標の原点に接し  $\xi_1$  軸上に中心を持つ 2 つの球面になる. また射線面は  $\xi_1 = \pm b$  となり  $\xi_1$  軸上の 2 つの点になる. Alfvén 波は磁場の擾乱が磁力線に沿って伝播するもので, 天文学的スケールのプラズマ (例えば太陽の黒点) では磁場が流体に凍結 (frozen in) されているので重要であるが, 実験室レベルでプラズマが磁場内を通りぬける場合には無視できよう.

<sup>19</sup>この行列式は次のように計算することができる. まず行列式の各行, 各列に適当な係数を掛ければ

$$Q = \mu V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & -\mu\rho V^2/\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & 0 & 0 & & & \\ \xi_2 & 0 & -\mu\rho V^2/\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & 0 & & & \\ \xi_3 & 0 & 0 & -\mu\rho V^2/\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{この部分は同じ}$$

次に第 2 列から第 5 列, 第 3 列から第 6 列, 第 4 列から第 7 列を引算すれば行列式は小さくなり

$$= \mu V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & -B_1 \xi_1 + A & -B_2 \xi_1 & -B_3 \xi_1 \\ \xi_2 & -B_1 \xi_2 & -B_2 \xi_2 + A & -B_3 \xi_2 \\ \xi_3 & -B_1 \xi_3 & -B_2 \xi_3 & -B_3 \xi_3 + A \end{vmatrix}$$

ただし  $A \equiv \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} - \mu\rho V^2/\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi}$ . 更に計算すれば

$$= \mu V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 B_1 B_2 B_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1/B_1 & \xi_2/B_2 & \xi_3/B_3 \\ 1 & -1 + A/B_1 \xi_1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 + A/B_2 \xi_2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 + A/B_3 \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$= \mu V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 A^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mu V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 A^2 \begin{vmatrix} -\xi^2 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

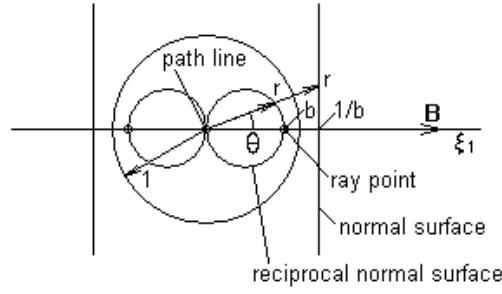


図 17.9: Alfvén 波の法線面，法線速度面，射線

次に圧縮性流れの場合について述べる．式 (17.41) は  $\nabla p = c^2 \nabla \rho$ ,  $(1/2) \nabla B^2 = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  などの関係を用いれば次のようになる．

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (17.45a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + c^2 \nabla \rho + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0 \quad (17.45b)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (17.45c)$$

特性の条件は次のようになる．

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = \begin{vmatrix} V & \rho \xi_1 & \rho \xi_2 & \rho \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \mu c^2 \xi_1 & \mu \rho V & 0 & 0 & B_1 \xi_1 - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & B_2 \xi_1 & B_3 \xi_1 \\ \mu c^2 \xi_2 & 0 & \mu \rho V & 0 & B_1 \xi_2 & B_2 \xi_2 - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & B_3 \xi_2 \\ \mu c^2 \xi_3 & 0 & 0 & \mu \rho V & B_1 \xi_3 & B_2 \xi_3 & B_3 \xi_3 - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} \\ -B_1 V / \rho & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ -B_2 V / \rho & 0 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & 0 & 0 & V & 0 \\ -B_3 V / \rho & 0 & 0 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & 0 & 0 & V \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を計算すれば<sup>20</sup>．

$$V \{V^2 - (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\} \{V^4 - (c^2 + b^2) \boldsymbol{\xi}^2 V^2 + c^2 (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \boldsymbol{\xi}^2\} = 0 \quad (17.46)$$

更に流れに乗って移動する座標系を用いれば

$$\tau \{\tau^2 - (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\} \{\tau^4 - (c^2 + b^2) \boldsymbol{\xi}^2 \tau^2 + c^2 (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \boldsymbol{\xi}^2\} = 0$$

<sup>20</sup> 上と同様に計算すれば，

$$Q = V(\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \mu \rho (c^2 \xi_1 - V^2 B_1 / (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})) & -B_1 \xi_1 + A & -B_2 \xi_1 & -B_3 \xi_1 \\ \mu \rho (c^2 \xi_2 - V^2 B_2 / (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})) & -B_1 \xi_2 & -B_2 \xi_2 + A & -B_3 \xi_2 \\ \mu \rho (c^2 \xi_3 - V^2 B_3 / (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})) & -B_1 \xi_3 & -B_2 \xi_3 & -B_3 \xi_3 + A \end{vmatrix}$$

$$= \mu \rho c^2 V (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_1 & \text{上と同じ} & & \\ \xi_2 & & \text{上と同じ} & \\ \xi_3 & & & \text{上と同じ} \end{vmatrix} - \mu \rho V^3 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ B_1 & \text{上と同じ} & & \\ B_2 & & \text{上と同じ} & \\ B_3 & & & \text{上と同じ} \end{vmatrix}$$

これより

$$(i) \text{ エントロピー波: } \quad \tau = 0 \quad (17.47a)$$

$$(ii) \text{ Alfvén 波: } \quad \tau^2 - (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2 = 0 \quad (17.47b)$$

$$(iii) \text{ 圧力波: } \quad \tau^4 - (c^2 + b^2)\boldsymbol{\xi}^2\tau^2 + c^2(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\xi^2 = 0 \quad (17.47c)$$

エントロピー波と Alfvén 波については既に述べたので以下には圧力波についてのみ説明する .

圧力波の法線面の式は式 (17.47c) から

$$1 - (c^2 + b^2)\boldsymbol{\xi}^2 + c^2(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\xi})^2\xi^2 = 0$$

$\boldsymbol{\xi}$  を極座標  $(r, \theta)$  で表せば

$$1 - (c^2 + b^2)r^2 + c^2b^2r^4 \cos^2\theta = 0$$

この  $r$  の 4 次式は  $D \equiv (c^2 + b^2)^2 - 4c^2b^2 \cos^2\theta = (c^2 - b^2)^2 + 4c^2b^2 \sin^2\theta \geq 0$  であるから 4 実根を持つ .

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 \pm \sqrt{D})$$

特に

$$\theta = 0, \pi: \quad r = \pm 1/c, \pm 1/b$$

$$\theta = \pm\pi/2: \quad r = \pm 1/\sqrt{c^2 + b^2}$$

漸近線は  $\theta \rightarrow \pm\pi/2, 1/r \rightarrow 0$  と置けば得られる .

$$\xi_1 = r \cos\theta = \pm \sqrt{c^2 + b^2}/cb$$

以上を基に CG で描いた圧縮性 MHD 流れの法線面, 法線速度面, 射線面をそれぞれ図 17.10, 17.11, 17.12 に示す . Alfvén 波は非圧縮性流れのものと同じである . またエントロピー波も同じで座標の原点にあるこの式の第 1 項は非圧縮性流れと同じで, 第 2 項の行列式  $q_2$  は例えば次のように計算できる .

$$\begin{aligned} q_2 &= B_1 B_2 B_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \begin{vmatrix} 0 & \xi_1/B_1 & \xi_2/B_2 & \xi_3/B_3 \\ B_1/\xi_1 & -1 + A/B_1 \xi_1 & -1 & -1 \\ B_2/\xi_2 & -1 & -1 + A/B_2 \xi_2 & -1 \\ B_3/\xi_3 & -1 & -1 & -1 + A/B_3 \xi_3 \end{vmatrix} \\ &= B_1 B_2 B_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \xi_1/B_1 & \xi_2/B_2 & \xi_3/B_3 \\ 1 & B_1/\xi_1 & A/B_1 \xi_1 & 0 & 0 \\ 1 & B_2/\xi_2 & 0 & A/B_2 \xi_2 & 0 \\ 1 & B_3/\xi_3 & 0 & 0 & A/B_3 \xi_3 \end{vmatrix} \\ &= A \begin{vmatrix} A & 0 & B_1 \xi_1 & B_2 \xi_2 & B_3 \xi_3 \\ 0 & 0 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ 1 & B_1/\xi_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & B_2/\xi_2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & B_3/\xi_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} A - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} & -B^2 \\ -\xi^2 & -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi} \end{vmatrix} = A \{ \mu \rho V^2 - B^2 \xi^2 \} \end{aligned}$$

第 2 式は第 1 式の上と左に要素を補って計算したものである . また第 4 式は第 3 式の第 1 列の第 3 要素以下を 0 にし, それから第 2 列の第 3 要素以下を 0 にすれば得られる .



る．しかし圧力波は通常の圧縮性流れのものとは全く異なり，法線速度面上でいえば Alfvén 波の外側にある速い波 (fast waves) と内側にある遅い波 (slow waves) の2つになる．なおこれら3つの図では波面の方向の同じ波は同じ色で表わされている．遅い圧力波の法線面には変曲点があり，これらの点は射線面の尖点 (cusp) に対応している．磁場の作用するプラズマ中を磁場の方向に伝播する擾乱は一般に1つのエントロピー波，2つの Alfvén 波，4つの圧力波からなる．

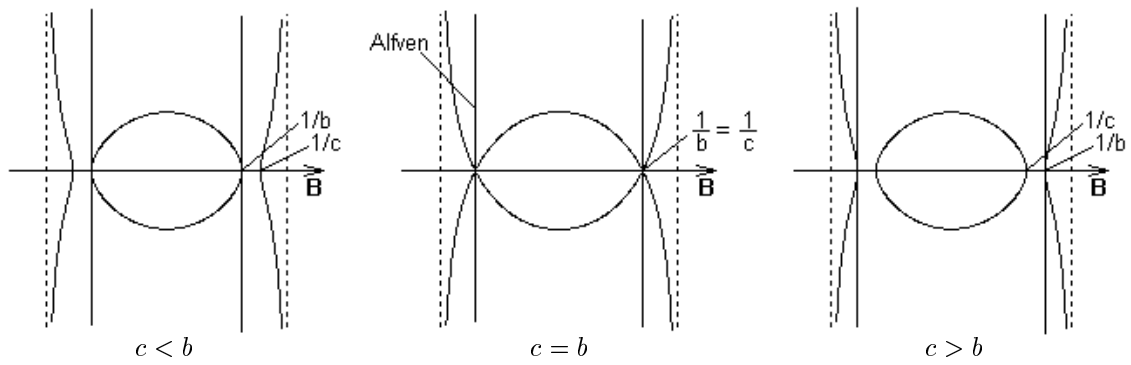


図 17.10: 圧縮性 MHD 流れの法線面

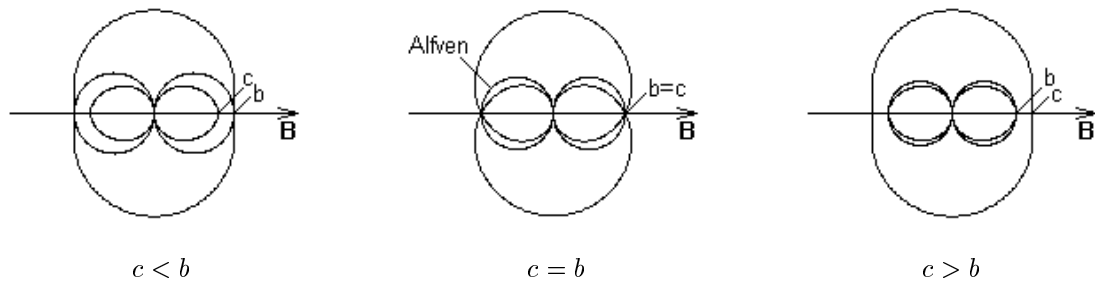


図 17.11: 圧縮性 MHD 流れの法線速度面

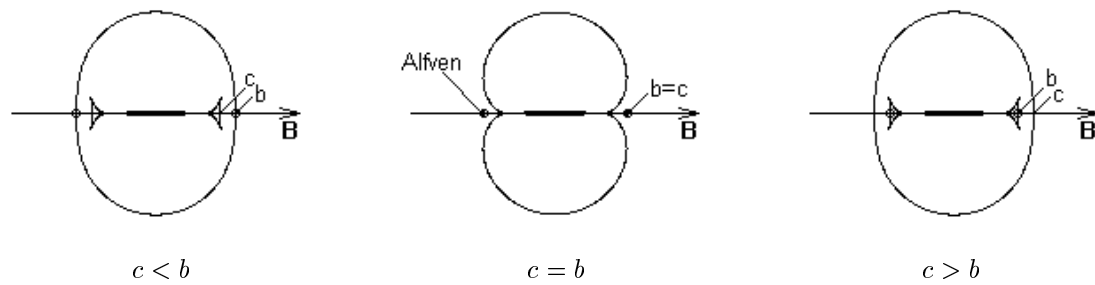


図 17.12: 圧縮性 MHD 流れの射線面

## 17.2 圧縮性流れの基礎方程式

圧縮性流れの基礎方程式は質量，運動量，エネルギーの保存の式で次のように書かれる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (17.48a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{f} \quad (17.48b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (17.48c)$$

ただし  $\rho$  は密度， $\mathbf{u}$  は流速， $e = \rho(\epsilon + \mathbf{u}^2/2)$  は単位体積当たりの岐点内部エネルギー， $p$  は静圧， $H = h + \mathbf{u}^2/2 = (e+p)/\rho$  は岐点エンタルピー， $\mathbf{\Pi}$  は粘性応力テンソル， $\mathbf{q}$  は熱流束， $\mathbf{f}$  は外力である．式 (17.48) は圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (the compressible Navier-Stokes equations) と呼ばれ，層流または乱流の直接数値シミュレーション (DNS, direct numerical simulation) に用いられる．乱流の実用計算については次章に述べる．式 (17.48) から拡散項すなわち  $\mathbf{\Pi}$  と  $\mathbf{q}$  を含む項を除いた式は圧縮性オイラー方程式 (the compressible Euler equations) と呼ばれる．

ここで圧縮性流れの数式によく出てくる記号をあらかじめまとめて説明しておく． $T$ ， $\epsilon$ ， $h = \epsilon + p/\rho$  は静温度，比内部エネルギー，比エンタルピーで，完全気体を仮定すれば， $p = \rho RT$ ， $d\epsilon = c_v dT$ ， $dh = c_p dT$  である． $c_v$ ， $c_p$ ， $\gamma$ ， $R$  は定積比熱，定圧比熱，比熱比，気体定数でこれら 4 定数の間には  $\gamma = c_p/c_v$ ， $R = c_p - c_v$  なる関係があり，2 つが分かれば他の 2 つは決まる． $c = \sqrt{\gamma RT}$  は音速， $M = |\mathbf{u}|/c$  はマッハ数である．また粘性応力テンソル (viscous stress tensor)  $\mathbf{\Pi}$  と熱流束 (heat flux)  $\mathbf{q}$  の成分は次のようになる．

$$\tau_{ij} = \mu \left( u_{j,i} + u_{i,j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (17.49)$$

$$q_i = -\kappa T_{,i} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{\mu}{P_r} \frac{\partial e^2}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.50)$$

ただし  $u_{j,i} = \partial u_j / \partial x_i$ ， $\delta_{ij}$  はクロネッカー  $\delta$  関数， $\mu$  は粘性係数， $\kappa$  は熱伝導率， $P_r = c_p \mu / \kappa$  はプラントル数 (Prandtl number) である．

### 17.2.1 デカルト座標系の圧縮性 Navier-Stokes 方程式

圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (17.48) はデカルト座標系 (cartesian coordinates)  $\mathbf{x}$  では次のようになる．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + D + g = 0 \quad (17.51a)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} p \\ \rho H u_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.51b)$$

$$D = -\frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ij}u_j - q_i \end{pmatrix}, \quad g = -\begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_i u_i \end{pmatrix}$$

ただし 上式の  $q$  は未知変数,  $F_i$  は流束,  $D$  は拡散項,  $g$  は外力項である.

### 17.2.2 一般曲線座標系の圧縮性 Navier-Stokes 方程式

デカルト座標系を  $\mathbf{x}$ , 一般曲線座標系 (general curvilinear coordinates) を  $\xi$  で表せば, これらの座標間の変換の測度 (metrics)  $x_\xi, \dots$  と  $\xi_x, \dots$  の間には次の関係が成立する.

$$\begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.52)$$

また変換のヤコビアン (jacobian)  $J$  は

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \quad (17.53)$$

となる. これらは 2 次元の場合には次のようになる.

$$x_\xi = J\eta_y, \quad x_\eta = -J\xi_y, \quad y_\xi = -J\eta_x, \quad y_\eta = J\xi_x, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (17.54)$$

$\mathbf{x}$  に関する微分を  $\xi$  に関する微分に書き換えれば次のようになる<sup>21</sup>.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \nabla = (\nabla \xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (17.55)$$

具体的には, 例えば

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \\ \partial/\partial \xi & \partial/\partial \eta & \partial/\partial \zeta \end{vmatrix}$$

また 2 次元では

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

<sup>21</sup>ここでは Einstein 総和規約 (Einstein convention),  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i$  が用いられる. 例えば式 (17.55) の第 1 式は 3 次元では次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

また一般に  $\partial(J\partial\xi_j/\partial x_i)/\partial\xi_j = 0$ ,  $\partial(J\nabla\xi_j)/\partial\xi_j = 0$  で次の関係が成立する .

$$J\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = J\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_j} = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(J\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\phi\right) \quad (17.56a)$$

$$J\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial\xi_j}J(\nabla\xi_j)\phi \quad (17.56b)$$

$$J\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(Jg^{jk}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\right) \quad (17.56c)$$

ただし  $(g^{ij})$  は測度テンソル (metric tensor) で , その成分は次のように定義される .

$$g^{ij} = \nabla\xi_i \cdot \nabla\xi_j = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k} \quad (17.57)$$

流線に沿う内微分 (interior derivative) は次のように書き換えられる .

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_i \frac{\partial}{\partial x_i} = u_i \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial\xi_j} = U_j \frac{\partial}{\partial\xi_j} = \mathbf{U} \cdot \tilde{\nabla} \quad (17.58)$$

ただし  $U_j$  は反変速度 (contravariant velocity) の  $\xi_j$  方向成分である .

写像空間の反変速度  $U$  と物理空間の流速  $\mathbf{u}$  の間には次の関係がある .

$$U_j = \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} u_i, \quad u_i = \frac{\partial x_i}{\partial\xi_j} U_j \quad (17.59)$$

流れの渦度  $\zeta$  と流速  $\mathbf{u}$  の関係  $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}$  は成分で表せば

$$\zeta_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (17.60)$$

ただし  $(\epsilon_{ijk})$  は Eddington の  $\epsilon$  である<sup>22</sup> . 写像空間の反変渦度 (contravariant vorticity)  $Z$  は物理空間の渦度  $\zeta$  に対し次のように定義される .

$$Z_j = \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} \zeta_i, \quad \zeta_i = \frac{\partial x_i}{\partial\xi_j} Z_j \quad (17.61)$$

このとき反変渦度と反変速度の関係は次のようになる .

$$\begin{aligned} Z_l &= \nabla\xi_l \cdot \zeta = \nabla\xi_l \cdot \nabla\xi_m \times \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi_m} = \frac{1}{J} \epsilon_{lmn} \frac{\partial x_i}{\partial\xi_n} \frac{\partial u_i}{\partial\xi_m} = \frac{1}{J} \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial\xi_m} \left( \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_n} \cdot \mathbf{u} \right) \\ &= \frac{1}{J} \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial\xi_m} (g_{nj} U_j) \end{aligned} \quad (17.62)$$

ただし  $(g_{ij})$  は測度テンソルで ,  $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$  , その成分は次式で定義される .

$$g_{ij} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_i} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_j} = \frac{\partial x_k}{\partial\xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial\xi_j} \quad (17.63)$$

なおデカルト座標系から一般曲線座標系への変換に関して不明の点は 13.6 節を参照いただきたい .

<sup>22</sup>Eddington の  $\epsilon$  は次のように定義される .

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((ijk) = (123), (231), \text{または } (312)) \\ -1 & ((ijk) = (321), (213), \text{または } (132)) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

例えば ,  $\zeta_1 = \epsilon_{1jk} \partial u_k / \partial x_j = \partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3$  である .

一般曲線座標系  $\xi$  の圧縮性 Navier-Stokes 方程式は、式 (17.48) に上述の関係を用いれば比較的容易に導出できる。すなわち式 (17.48) にヤコビアン  $J$  を乗じ、式 (17.56b) を用い、反変速度  $U_i$  を導入すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho \mathbf{u} U_i + \nabla \xi_i p \\ \rho H U_i \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (J \nabla \xi_i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u} - q \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

これより次の一般曲線座標系の圧縮性ナビエ・ストークス方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \hat{D} + \hat{g} = 0 \quad (17.64a)$$

$$\hat{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho u_2 U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho u_3 U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.64b)$$

$$\hat{D} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} J \xi_{i,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{j1} \\ \tau_{j2} \\ \tau_{j3} \\ \tau_{jk} u_k - q_j \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = -J \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_k u_k \end{pmatrix}$$

ただし  $\hat{q}$  は未知変数、 $\hat{F}_i$  は流束、 $\hat{D}$  は拡散項、 $\hat{g}$  は外力項である。また  $J = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \zeta)$ 、 $\xi_{i,j} = \partial \xi_i / \partial x_j$  は変換のヤコビアンと測度である。式 (17.64) は、式 (17.51) の  $\mathbf{x}$  の微分を  $\xi$  の微分に変え、曲線座標格子を用いる数値計算に適するようにしたものである。

式 (17.64) は、数学的に出てきたものでその解釈は不要との考えもあるが、格子形成や境界条件の設定のためにはその意味をある程度把握しておくべきであろう。まずヤコビアン  $J$  の意味を考えよう。図 17.13 を参照すれば、

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \approx (\mathbf{x}_{100} - \mathbf{x}_{000}) \cdot (\mathbf{x}_{010} - \mathbf{x}_{000}) \times (\mathbf{x}_{001} - \mathbf{x}_{000})$$

$J$  は  $\xi$  空間内の単位立方体要素の  $\mathbf{x}$  空間における体積、すなわち [物理空間の局所体積]: [写像空間の相当体積] の比を表している。次に  $p$  にかかる係数、例えば  $J \nabla \xi$  の意味を考えよう。下図を参照すれば、

$$J \nabla \xi = \begin{pmatrix} J \xi_x & J \xi_y & J \xi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} y_\eta & y_\zeta \\ z_\eta & z_\zeta \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} z_\eta & z_\zeta \\ x_\eta & x_\zeta \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} x_\eta & x_\zeta \\ y_\eta & y_\zeta \end{matrix} \right| \end{pmatrix} \approx (\mathbf{x}_{010} - \mathbf{x}_{000}) \times (\mathbf{x}_{001} - \mathbf{x}_{000})$$

$J \nabla \xi$  は  $\xi$  空間内の単位立方体要素の  $\xi = \text{const.}$  面に相当する  $\mathbf{x}$  空間の面の面積ベクトルである。またその大きさは [物理空間の  $\xi = \text{const.}$  面の局所面積]: [写像空間の相当面積] の比を表している。

ここで物理空間  $\mathbf{x}$  の流れと写像空間  $\xi$  の流れの対応を考えれば、 $\mathbf{x}$  空間で ある流体素片が 1 つの流跡線に沿って流速  $\mathbf{u}$  で移動するとき、その流体素片は  $\xi$  空間では相当の流跡線に沿って反変速度  $U$  で移動す

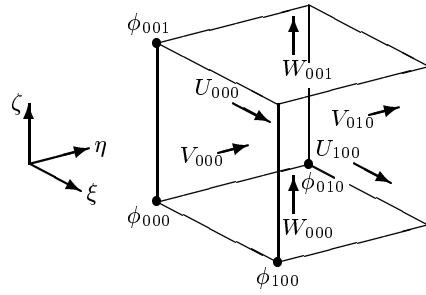


図 17.13:  $\xi$  空間内の単位立方体格子

る<sup>23</sup> . また  $\xi$  空間の密度 , 運動量 , 比内部エネルギー , 比エンタルピー , 物体力はそれぞれ  $x$  空間のものに  $J$  をかけたものになり ,  $\xi$  空間の静圧 , 応力テンソル , 熱流束は  $x$  空間のものに  $J\nabla\xi$  をかけたものになる . つまり  $\xi$  空間における諸量は  $x$  空間の諸量に対し , 流速は写像に伴う流線方向の長さの変化に比例し , 密度 , 運動量などは写像による体積の変化に反比例し , 静圧などは写像による面積の変化に反比例して変化する . 例えば密度に関しては 2 つの流れ場の対応部分の質量は同じになり , また静圧に関しては対応する局所面積に作用する力の大きさは同じになるということである . 式 (17.64) はこのように定義された諸量に対する質量 , 運動量 , エネルギーの保存の式と解釈することができる .

式 (17.64) には  $x_1, x_2, x_3$  方向成分の運動方程式が含まれるが , 以下では  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  方向成分の運動方程式を導く . 反変速度成分  $U_i$  は流速  $\mathbf{u}$  に  $\nabla\xi_i \cdot$  をかけたものであるから , この方程式は式 (17.48b) に  $J\nabla\xi_i \cdot$  をかけることによって導かれる . なおその過程では

$$J\nabla\xi_i \cdot \rho\mathbf{u} = J\rho U_i,$$

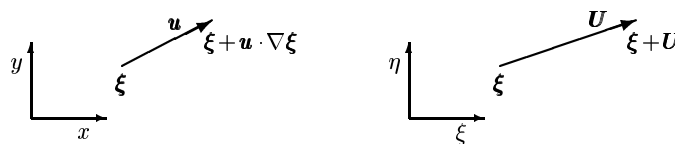
$$J\nabla\xi_i \cdot (\nabla \cdot \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p) = \nabla\xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial\xi_i} J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla\xi_i p) = \frac{\partial}{\partial\xi_i} J(\rho U_i U_i + g^{i1} p) - J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla\xi_i p) \cdot \frac{\partial}{\partial\xi_i} \nabla\xi_i$$

のように計算される . このようにして得られた運動方程式に上記の連続方程式とエネルギー方程式を補ったナビエ・ストークス方程式は次のようになる .

$$B\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial\xi_i} + \tilde{D} + \tilde{g}\right) = \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial\xi_i} + \tilde{R} + \tilde{D} + \tilde{g} = 0 \tag{17.65a}$$

$$\tilde{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho U_1 U_i + g^{i1} p \\ \rho U_2 U_i + g^{i2} p \\ \rho U_3 U_i + g^{i3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

<sup>23</sup> 流速ベクトル  $\mathbf{u}$  は物理空間内の流体素片の単位時間における  $x$  の変化 , 実質微分  $\partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  はその間における流体素片に関する量の変化を表す微分演算子である . したがって反変速度  $U = \mathbf{u} \cdot \nabla\xi$  は単位時間における流体素片の  $\xi$  の変化すなわち写像空間の流速である .



$$\tilde{R} = -J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla \xi_i p) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \xi_1 \\ \nabla \xi_2 \\ \nabla \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17.65b)$$

$$\tilde{D} = -J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tau_{ik} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{1,i0} \\ \xi_{2,i0} \\ \xi_{3,i0} \\ u_i \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} J g_{ij} k \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = -J \rho \mathbf{f} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \xi_1 \\ \nabla \xi_2 \\ \nabla \xi_3 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & 0 \\ 0 & \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} & 0 \\ 0 & \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.65c)$$

ただし式 (17.65) の  $\tilde{q}$  は未知変数,  $\tilde{F}_i$  は流束,  $\tilde{R}$  は付加項,  $\tilde{D}$  は拡散項,  $\tilde{g}$  は外力項で, 式 (17.65c) の  $B$  は流速  $\mathbf{u}$  を反変速度  $\mathbf{U}$  に変換する行列である. また  $g^{ij} = \xi_{i,k} \xi_{j,k}$  は反変測度テンソルの成分で, 添字 0 の付いている量は微分しないものとする.  $\partial(a_0 b)/\partial \xi = a_0 \partial b/\partial \xi$ .

式 (17.65) の運動方程式は質量流束 (mass flux)  $J\rho \mathbf{U}$  の運動方程式である. この質量流束の  $\xi_i$  成分  $J\rho U_i$  は  $\xi$  空間の単位立方体格子を  $\mathbf{x}$  空間に写像した格子セルの  $\xi_i = \text{const.}$  面を通る質量流量である. この運動方程式の 3 成分の式は, 式 (17.64) の保存形運動方程式の 3 成分の線形結合を取ったもので, 非保存形である. 式 (17.65a) は, 対流項を無理遣り保存形に書換えたもので, そのために付加項  $\tilde{R}$  が生じている. この付加項の大きさは滑らかな格子では小さくなる. なお下記の解法は  $\Delta$  形近似因子法によるもので, その左辺の演算子には式 (17.65a) の  $\partial \tilde{q}/\partial t + \partial \tilde{F}_i/\partial \xi_i$ , 右辺には式 (17.65a) の左辺からの式が用いられる.

### 17.3 線形化と対角化

圧縮性ナビエ・ストークス方程式は, 拡散項を含むので正しくは双曲型ではないが, この方程式の拡散項は流れの大部分の領域でほかの項に比べ十分小さいので, この方程式は, オイラー方程式に拡散項がただ単に加わったものとして, 双曲型のオイラー方程式の解法で解かれている. 後述の流束差分分離法または有限体積法では, オイラー方程式の流束の微分が流束分離法によって離散近似される. 流束分離法は, 各座標方向に伝播するエントロピー波, 圧力波, 剪断波などの波を, それぞれの向きよって個別に上流化するもので, 物理現象に則した妥当な解を安定に得るものである. 本節ではそのために, 各座標方向の 1 次元オイラー方程式に対し線形化 (linearization), 非保存形化, 更に対角化 (diagonalization) を行うが, これは前章に述べた 1 次元双曲型微分方程式の特性の理論によって, 1 次元オイラー方程式をこれらの波の常微分方程式の系に変換することにはかならない. 最近では, 衝撃波の捕獲に保存性が重要という観点から, 基礎方程式として保存形 (conservative form) で書かれたナビエ・ストークス方程式 (17.48) が用いられているが,

以前には簡単な次の非保存形 (nonconservative form) ナヴィエ・ストークス方程式も用いられていた<sup>24</sup> .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (17.66a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}) \quad (17.66b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\tilde{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (17.66c)$$

### 17.3.1 デカルト座標系のオイラー方程式

はじめに デカルト座標系のオイラー方程式を考える . 1つの空間次元の部分のみを取り出せば

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.67a)$$

ただし 添字  $i$  は 1 または 2 または 3 で , ここではアインシュタイン総和規約には従わないものとする . 未知変数ベクトル  $q$  と流束ベクトル  $F_i$  は次のようになる .

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} p \\ \rho H u_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.67b)$$

流束  $F_i$  は  $q$  の成分の 1 次の同次式であるから , オイラーの同次関係を用いれば

$$dF_i = \frac{\partial F_i}{\partial q} dq = A_i dq, \quad F_i = A_i q, \quad dA_i q = 0 \quad (17.68)$$

となり , 式 (17.67) は次のように線形化することができる .

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_i \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.69a)$$

ただし ヤコビ行列  $A_i = \partial F_i / \partial q$  は

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} & 0 \\ -u_1 u_i + \delta_{i1} \phi^2 & D_{i1} & \delta_{i2} u_1 - \delta_{i1} \tilde{\gamma} u_2 & \delta_{i3} u_1 - \delta_{i1} \tilde{\gamma} u_3 & \delta_{i1} \tilde{\gamma} \\ -u_2 u_i + \delta_{i2} \phi^2 & \delta_{i1} u_2 - \delta_{i2} \tilde{\gamma} u_1 & D_{i2} & \delta_{i3} u_2 - \delta_{i2} \tilde{\gamma} u_3 & \delta_{i2} \tilde{\gamma} \\ -u_3 u_i + \delta_{i3} \phi^2 & \delta_{i1} u_3 - \delta_{i3} \tilde{\gamma} u_1 & \delta_{i2} u_3 - \delta_{i3} \tilde{\gamma} u_2 & D_{i3} & \delta_{i3} \tilde{\gamma} \\ -H u_i + \phi^2 u_i & \delta_{i1} H - \tilde{\gamma} u_1 u_i & \delta_{i2} H - \tilde{\gamma} u_2 u_i & \delta_{i3} H - \tilde{\gamma} u_3 u_i & \gamma u_i \end{pmatrix} \quad (17.69b)$$

<sup>24</sup> ナヴィエ・ストークス方程式は周知のように , 熱力学でいう流体要素のシステムに対し質量・運動量・エネルギーの保存則を適用することによって導かれた保存形方程式が先にあり , 非保存形方程式はその線形結合を取ることによって導かれるものである . 圧力の輸送方程式は  $\phi^2 (17.48a) - \tilde{\gamma} \mathbf{u} \cdot (17.48b) + \tilde{\gamma} (17.48c)$  と置くことによって導かれる .

$$\phi^2 \rho - \tilde{\gamma} \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{u} + \tilde{\gamma} e = p, \quad \phi^2 \nabla \cdot \rho \mathbf{u} - \tilde{\gamma} \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) + \tilde{\gamma} \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$$



$\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ ,  $\phi^2 = \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2/2$ ,  $D_{ij} = u_i + \delta_{ij}(1 - \tilde{\gamma})u_j$  である<sup>25</sup>.

デカルト座標系の非保存形オイラー方程式の1つの空間次元の式は, 式 (17.66) から次のようになる.

$$\frac{\partial q^*}{\partial t} + A_i^* \frac{\partial q^*}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.70a)$$

$$q^* = \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad A_i^* = \begin{pmatrix} u_i & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 \\ 0 & u_i & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho \\ 0 & 0 & u_i & 0 & \delta_{i2}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & u_i & \delta_{i3}/\rho \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & u_i \end{pmatrix} \quad (17.70b)$$

式 (17.70a) は,

$$dq^* = \frac{\partial q^*}{\partial q} dq = N dq \quad (17.71)$$

で定義される行列  $N$  を式 (17.69a) の左から演算したものである. なお

$$A_i^* = N A_i N^{-1}$$

である<sup>26</sup>.

保存形から非保存形への変換の行列  $N = \partial q^*/\partial q$  とその逆行列  $N^{-1}$  は次のようになる.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2/2 & -\tilde{\gamma} u_1 & -\tilde{\gamma} u_2 & -\tilde{\gamma} u_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.72a)$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \mathbf{u}^2/2 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.72b)$$

<sup>25</sup>  $A$  の要素は, まず  $F$  の成分の式を  $q$  の成分で表し,

$$F_{i2} = \rho u_1 u_i + \delta_{i1} p = \frac{\rho u_1 \rho u_i}{\rho} + \delta_{i1} \tilde{\gamma} e - \delta_{i1} \frac{\tilde{\gamma}}{2\rho} \{(\rho u_1)^2 + (\rho u_2)^2 + (\rho u_3)^2\},$$

$$F_{i5} = \rho H u_i = \frac{\gamma e \rho u_i}{\rho} - \frac{\tilde{\gamma} \rho u_i}{2\rho^2} \{(\rho u_1)^2 + (\rho u_2)^2 + (\rho u_3)^2\}$$

それから  $q$  の成分で偏微分すれば容易に求めることができる. なお

$$H = \frac{e+p}{\rho} = \frac{c^2 + \phi^2}{\tilde{\gamma}} = \frac{\gamma e}{\rho} - \phi^2, \quad \phi^2 = \frac{1}{2} \tilde{\gamma} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

<sup>26</sup> 蛇足ではあるが,  $q^*$  は  $q$  の成分の1次の同次式ではないから, 上記のような関係  $q^* = Nq$  と  $dNq = 0$  は成立しない. オイラーの同次関係については代数の教科書あるいは 16.2 節の脚注参照.

これらの行列の導出については脚注参照<sup>27</sup>。

ヤコビ行列  $A_i$  は直接対角化することもできるが、その計算はかなり面倒になるので、ここではまず  $A_i^*$  を対角化しそれから  $A_i$  を次式によって対角化することにする。

$$A_i = N^{-1}A_i^*N = N^{-1}R_i^*A_iL_i^*N = R_iA_iL_i \quad (17.73)$$

$A_i$  は行列  $A_i^*$  の固有値  $\lambda_{ik}$  からなる対角行列、 $L_i^*$  は  $A_i^*$  の左固有ベクトル  $l_{ik}$  からなる行列、 $R_i^* = L_i^{*-1}$  は右固有ベクトル  $r_{ik}$  からなる行列である。ここでは次に  $A_i^*$  の固有値  $\lambda_{ik}$  と左固有ベクトル  $l_{ik}^*$  の求め方について簡単に説明する。固有値  $\lambda_{ik}$  は  $\lambda_i$  の 5 次代数方程式

$$|A_i^* - \lambda_i I| = \begin{vmatrix} u_i - \lambda_i & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 \\ 0 & u_i - \lambda_i & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho \\ 0 & 0 & u_i - \lambda_i & 0 & \delta_{i2}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & u_i - \lambda_i & \delta_{i3}/\rho \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & u_i - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

の根で、 $\lambda_{i1} = u_i$  (3 重根)、 $\lambda_{i2} = u_i + c$ 、 $\lambda_{i3} = u_i - c$  となる<sup>28</sup>。左固有ベクトル  $l_{ik}^*$  を求める式は固有値  $\lambda_i = u_i$  に対しては

$$l_i^*(A_i^* - \lambda_i I) = (l_{ik}^{*1} \ l_{ik}^{*2} \ \cdots \ l_{ik}^{*5}) \begin{pmatrix} 0 & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i2}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i3}/\rho \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

<sup>27</sup>  $N$  の要素は、まず  $q^*$  の成分の式を

$$q_2 = u_1 = \rho u_1 / \rho,$$

$$q_5 = p = \gamma e - \frac{\tilde{\gamma}}{2\rho} \{ (\rho u_1)^2 + (\rho u_2)^2 + (\rho u_3)^2 \}$$

のように  $q$  の成分で表し、それから  $q$  の成分で偏微分すれば容易に求めることができる。

逆行列の計算の仕方は代数の教科書にあると思うが、その概略を説明すれば次のようになる。行列  $N$  の要素と単位行列  $I$  の要素を横に並べた 5 行 10 列の行列を紙に間をあけて書く。 $N$  が単位行列  $I$  になるように、次の 3 つの演算を適宜行う。

1 つの行のすべての要素に同じ 0 でない数または変数をかける。

1 つの行を別の行と入替える。

1 つの行のすべての要素に同じ 0 でない数または変数をかけ別の行に加える。

$N$  の場合にはまず第 2, 3, 4 行に  $\rho$  をかけ、第 5 行に  $1/\tilde{\gamma}$  をかける。次に第 1 列が  $I$  の第 1 列になるように第 1 行に  $u_1$  をかけ第 2 行に加える、などする。第 2 行に  $u_1$ 、第 3 行に  $u_2$ 、第 4 行に  $u_3$  をかけ第 5 行に加える。この時点ではじめ  $N$  の部分は  $I$  になり、 $I$  の部分に逆行列  $N^{-1}$  が得られる。古いものを / で消し新しいものを余白に書入れる。

<sup>28</sup> 上三角行列または下三角行列の行列式の値は対角要素の積になるという性質がある。また不完全な三角行列の場合にも同様の性質が利用できる。

$$|A_i^* - \lambda_i I| = (u_i - \lambda_i) \begin{vmatrix} u_i - \lambda_i & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho \\ 0 & u_i - \lambda_i & 0 & \delta_{i2}/\rho \\ 0 & 0 & u_i - \lambda_i & \delta_{i3}/\rho \\ \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & u_i - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

次にこの行列式の第 1, 2, 3 行に  $1/(u_i - \lambda_i)$  をかけ、その後で第 1 行に  $-\delta_{i1}\rho c^2$ 、第 2 行に  $-\delta_{i2}\rho c^2$ 、第 3 行に  $-\delta_{i3}\rho c^2$  をかけこれらを第 4 行に加え、上三角行列のものにする。

$$|A_i^* - \lambda_i I| = (u_i - \lambda_i)^3 ((u_i - \lambda_i)^2 - c^2) = 0$$

固有値  $\lambda_i = u_i \pm c$  に対しては

$$l_i^*(A_i^* - \lambda_i I) = (l_{ik}^{*1} \ l_{ik}^{*2} \ \cdots \ l_{ik}^{*5}) \begin{pmatrix} \mp c & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 \\ 0 & \mp c & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho \\ 0 & 0 & \mp c & 0 & \delta_{i2}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & \mp c & \delta_{i3}/\rho \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & \mp c \end{pmatrix} = 0$$

となる．これらの式から 1 次独立の 5 個の左固有ベクトルが得られる<sup>29</sup>．

ここで多少補足すれば，対角行列  $A_i$  の固有値の並べ方は，任意性を持つが，ここでは  $L_i^*$  したがって  $R_i^*$  の対角要素の大きさが小さくならないようにしている．固有値  $u_i$  に属する 3 個の固有ベクトルの選び方も任意性を持つが，ここでは常微分方程式が流跡線に沿って伝播する 1 つのエントロピー波，2 つの剪断波の式になるようにしている．なお固有値  $u_i \pm c$  に属する固有ベクトルの方向は一意的に決まり，その常微分方程式は 2 つの圧力波の式になる．固有値と固有ベクトルは対応するところに配さなければならない．行列  $A_i$  の固有値も  $A_i$  である．これは固有値  $\lambda_k$  が物理的に波の位相速度を表していることを考えれば当然のことである． $A_i$  の左固有ベクトルは  $L_i = L_i^* N$ ，右固有ベクトルは  $R_i = N^{-1} R_i^*$  で，これらの行列は次のように表される．

$$A_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_i + \delta_{i1}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i + \delta_{i2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i + \delta_{i3}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_i - c \end{pmatrix} \quad (17.74a)$$

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \delta_{i2}/\rho c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_{i3}/\rho c \\ 0 & \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} & -1/\rho c \end{pmatrix} N \quad (17.74b)$$

<sup>29</sup>  $i = 1$  の場合を考える．固有値  $\lambda_1 = u_1$  に対する意味のある式は  $\rho l_{1k}^{*1} + \rho c^2 l_{1k}^{*5} = 0$ ， $l_{1k}^{*2} = 0$  の 2 つである． $u_1$  は 3 重根であるから，1 次独立の左固有ベクトル 3 個が存在する可能性がある．その 1 つは第 1 式を満足する

$$l_{11}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/c^2)$$

である．残りは

$$l_{13}^* = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0), \quad l_{14}^* = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

である．一般に固有ベクトルは大きさと向きは任意で方向のみが特定される．また行列の次元が縮退し固有値が  $n$  重根の場合に  $n$  個のベクトルの方向は一義的には定まらない．上記のベクトルは左固有ベクトルの行列の対角要素がゼロにならないように，また最もシンプルになるように選んだものである．固有値  $\lambda_1 = u_1 \pm c$  に対しては  $\mp c l_{1k}^{*1} = 0$ ， $\rho l_{1k}^{*1} + \rho c l_{1k}^{*2} + \rho c^2 l_{1k}^{*5} = 0$ ， $\mp c l_{1k}^{*3} = 0$ ， $\mp c l_{1k}^{*4} = 0$ ， $l_{1k}^{*2} + \rho c l_{1k}^{*5} = 0$  の 5 つの式が得られるが独立のものは 4 つである．これより  $l_{1k}^{*1} = l_{1k}^{*3} = l_{1k}^{*4} = 0$ ，また  $u_1 \pm c$  に対してそれぞれ  $l_{1k}^{*2} + \rho c l_{1k}^{*5} = 0$  が得られ，左固有ベクトルは次のようになる．

$$l_{12}^* = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/\rho c), \quad l_{15}^* = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1/\rho c)$$

$i = 2, 3$  の場合も同様になる．

$$R_i = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \delta_{i1}\rho/2c & \delta_{i2}\rho/2c & \delta_{i3}\rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1-\delta_{i1}/2 & 0 & 0 & \delta_{i1}/2 \\ 0 & 0 & 1-\delta_{i2}/2 & 0 & \delta_{i2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\delta_{i3}/2 & \delta_{i3}/2 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c/2 & \delta_{i2}\rho c/2 & \delta_{i3}\rho c/2 & -\rho c/2 \end{pmatrix} \quad (17.74c)$$

非保存形の式 (17.70) と等価な常微分方程式系は，この式の左から左固有ベクトル  $L_i^*$  を乗じることによって得られるが，これは保存形の式 (17.67) の左から左固有ベクトル  $L_i$  を乗じたものでもある．

$$L_i \left( \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = L_i^* \frac{\partial q^*}{\partial t} + \Lambda_i L_i^* \frac{\partial q^*}{\partial x_i} = 0 \quad (17.75)$$

この常微分方程式系は具体的に書けば次のようになる．

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \rho - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) p = 0, \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i + \delta_{ij}c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} u_j + \frac{\delta_{ij}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i + c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} p = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i - c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} u_i - \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i - c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} p = 0 \end{aligned} \quad (17.76)$$

これらの式は特性曲線  $dx_i/dt = u_i$ ,  $dx_i/dt = u_i + c$ ,  $dx_i/dt = u_i - c$  に沿う内微分  $\partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ ,  $\partial/\partial t + (u_i + c) \partial/\partial x_i$  または  $\partial/\partial t + (u_i - c) \partial/\partial x_i$  のいずれか 1 つを含むので常微分方程式で，上から  $dx_i/dt = u_i$  に沿って伝播するエントロピー波， $dx_i/dt = u_i$  に沿う剪断波または  $dx_i/dt = u_i + c$  に沿う圧力波， $dx_i/dt = u_i - c$  に沿う圧力波を表している．

### 17.3.2 一般曲線座標系のオイラー方程式

一般曲線座標系の Euler 方程式の場合にも，同様に線形化，対角化することができる．

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.77a)$$

$$\hat{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho u_2 U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho u_3 U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.77b)$$

流束  $\hat{F}_i$  は  $\hat{q}$  の成分だけでなく測度  $\xi_{i,j}$  の関数であるが，時空間内の固定された点を考えれば， $\hat{F}_i$  は  $\hat{q}$  の成分だけの 1 次の同次式で Euler の同次関係から

$$d\hat{F}_i = \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \hat{q}} d\hat{q} = \hat{A}_i d\hat{q}, \quad \hat{F}_i = \hat{A}_i \hat{q}, \quad d\hat{A}_i \hat{q} = 0 \quad (17.78)$$

となり<sup>30</sup>，式 (17.77) は次のように線形化される．

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \hat{A}_i \frac{\partial \hat{q}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.79a)$$

ただしヤコビ行列  $\hat{A}_i = \partial \hat{F}_i / \partial \hat{q}$  は

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 \\ -u_1 U_i + \xi_{i,1} \phi^2 & \hat{D}_{i1} & \xi_{i,2} u_1 - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} u_2 & \xi_{i,3} u_1 - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} u_3 & \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \\ -u_2 U_i + \xi_{i,2} \phi^2 & \xi_{i,1} u_2 - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} u_1 & \hat{D}_{i2} & \xi_{i,3} u_2 - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} u_3 & \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \\ -u_3 U_i + \xi_{i,3} \phi^2 & \xi_{i,1} u_3 - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} u_1 & \xi_{i,2} u_3 - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} u_2 & \hat{D}_{i3} & \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \\ -H U_i + \phi^2 U_i & \xi_{i,1} H - \tilde{\gamma} U_i u_1 & \xi_{i,2} H - \tilde{\gamma} U_i u_2 & \xi_{i,3} H - \tilde{\gamma} U_i u_3 & \gamma U_i \end{pmatrix} \quad (17.79b)$$

$\hat{D}_{ij} = U_i + (1 - \tilde{\gamma}) \xi_{i,j} u_j$  である<sup>31</sup>．

非保存形方程式 (17.66) は， $\mathbf{u} \cdot \nabla = U_i \partial / \partial \xi_i$ ， $\nabla = \nabla \xi_i \partial / \partial \xi_i$  であるから簡単に一般曲線座標系の式に書換えることができ，その 1 つの空間次元の式は次のようになる．

$$\frac{\partial \hat{q}^*}{\partial t} + \hat{A}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (17.80a)$$

ただし未知変数ベクトル  $\hat{q}^*$  と行列  $\hat{A}_i^*$  は次のようになる．

$$\hat{q}^* = q^*, \quad \hat{A}_i^* = \begin{pmatrix} U_i & \xi_{i,1} \rho & \xi_{i,2} \rho & \xi_{i,3} \rho & 0 \\ 0 & U_i & 0 & 0 & \xi_{i,1} / \rho \\ 0 & 0 & U_i & 0 & \xi_{i,2} / \rho \\ 0 & 0 & 0 & U_i & \xi_{i,3} / \rho \\ 0 & \xi_{i,1} \rho c^2 & \xi_{i,2} \rho c^2 & \xi_{i,3} \rho c^2 & U_i \end{pmatrix} \quad (17.80b)$$

式 (17.80a) は，

$$d\hat{q}^* = \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \hat{q}} d\hat{q} = \frac{N}{J} d\hat{q}$$

であるから，保存形方程式 (17.79a) の左から  $N/J$  を演算したものである．ただし  $N$  は式 (17.72) で定義される非保存形への変換の行列である．

行列  $\hat{A}_i^*$  は式が簡単で容易に対角化することができ，これをもとに  $\hat{A}_i$  も対角化することができる．

$$\hat{A}_i = N^{-1} \hat{A}_i^* N = N^{-1} \hat{R}_i^* \hat{A}_i \hat{L}_i^* N = \hat{R}_i \hat{A}_i \hat{L}_i \quad (17.81)$$

<sup>30</sup>  $\hat{A}_i$  の要素は， $\hat{F}_i$  の成分を次のよう  $\hat{q}$  の成分で表してから， $\hat{q}$  の成分で微分して求める．

$$\begin{aligned} J\rho U_i &= \xi_{i,j} (J\rho u_i), \\ J(\rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p) &= \frac{\xi_{i,j} (J\rho u_1) (J\rho u_j)}{J\rho} + \xi_{i,1} \tilde{\gamma} J e - \frac{\xi_{i,1} \tilde{\gamma}}{2J\rho} (J\rho \mathbf{u})^2, \\ \frac{\xi_{i,j} (J\rho u_j)}{J\rho} \left\{ \gamma J e - \frac{\tilde{\gamma}}{2J\rho} (J\rho \mathbf{u})^2 \right\}, \end{aligned}$$

なお  $(1/2J\rho) \partial (J\rho \mathbf{u})^2 / \partial J\rho u_1 = u_1$ ．

<sup>31</sup> 例えば  $\hat{D}_{i1} = U_i + (1 - \tilde{\gamma}) \xi_{i,1} u_1$  で，ここにはアインシュタインの総和側は適用されないことに注意．

$\hat{A}_i^*$  の固有値と固有ベクトルは、デカルト座標系の  $A_i^*$  の固有値、固有ベクトルとほぼ同様の計算で求めることができるので結果のみ示すことにする<sup>32</sup>。

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} U_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i + \delta_{1i} \sqrt{g^{11}} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_i + \delta_{2i} \sqrt{g^{22}} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i + \delta_{3i} \sqrt{g^{33}} c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i - \sqrt{g^{ii}} c \end{pmatrix} \quad (17.82a)$$

$$\hat{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \xi_{i,i} & \delta_{1i} \xi_{1,2} - \delta_{2i} \xi_{2,1} & \delta_{1i} \xi_{1,3} - \delta_{3i} \xi_{3,1} & \delta_{1i} \sqrt{g^{11}} / \rho c \\ 0 & \delta_{2i} \xi_{2,1} - \delta_{1i} \xi_{1,2} & \xi_{i,i} & \delta_{2i} \xi_{2,3} - \delta_{3i} \xi_{3,2} & \delta_{2i} \sqrt{g^{22}} / \rho c \\ 0 & \delta_{3i} \xi_{3,1} - \delta_{1i} \xi_{1,3} & \delta_{3i} \xi_{3,2} - \delta_{2i} \xi_{2,3} & \xi_{i,i} & \delta_{3i} \sqrt{g^{33}} / \rho c \\ 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & -\sqrt{g^{ii}} / \rho c \end{pmatrix} N \quad (17.82b)$$

$$\hat{R}_i = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_{1i} \rho}{2\sqrt{g^{11}} c} & \frac{\delta_{2i} \rho}{2\sqrt{g^{22}} c} & \frac{\delta_{3i} \rho}{2\sqrt{g^{33}} c} & -\frac{\rho}{2\sqrt{g^{ii}} c} \\ 0 & \mathbb{D}_{i1} & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i} - 1\right) \frac{\xi_{i,1} \xi_{i,2}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i} - 1\right) \frac{\xi_{i,1} \xi_{i,3}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,1}}{2g^{ii}} \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i} - 1\right) \frac{\xi_{i,2} \xi_{i,1}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \mathbb{D}_{i2} & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i} - 1\right) \frac{\xi_{i,2} \xi_{i,3}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,2}}{2g^{ii}} \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i} - 1\right) \frac{\xi_{i,3} \xi_{i,1}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i} - 1\right) \frac{\xi_{i,3} \xi_{i,2}}{g^{ii} \xi_{i,i}} & \mathbb{D}_{i3} & \frac{\xi_{i,3}}{2g^{ii}} \\ 0 & \frac{\delta_{1i} \rho c}{2\sqrt{g^{11}}} & \frac{\delta_{2i} \rho c}{2\sqrt{g^{22}}} & \frac{\delta_{3i} \rho c}{2\sqrt{g^{33}}} & -\frac{\rho c}{2\sqrt{g^{ii}}} \end{pmatrix} \quad (17.82c)$$

$$\mathbb{D}_{ij} = \left(\frac{3}{2}\delta_{ji} - 1\right) \frac{\xi_{i,j}^2}{g^{ii} \xi_{i,i}} + (1 - \delta_{ji}) \frac{1}{\xi_{i,i}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

式 (17.80) と等価な常微分方程式系は次のようになる。

$$\frac{\hat{L}_i}{J} \left( \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} \right) = \hat{L}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial t} + \hat{A}_i \hat{L}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (17.83)$$

あるいは

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \rho - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) p = 0, \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i + \sqrt{g^{ii}} c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} U_i + \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i + \sqrt{g^{ii}} c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} p = 0, \quad (j = i) \\ & \xi_{i,i} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) u_j - \xi_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) u_i = 0, \quad (j \neq i) \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i - \sqrt{g^{ii}} c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} U_i - \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - (U_i - \sqrt{g^{ii}} c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} p = 0 \end{aligned} \quad (17.84)$$

<sup>32</sup> 特性条件は

$$|\hat{A}_i^* - \hat{\lambda}_i I| = (U_i - \hat{\lambda}_i)^3 \{ (U_i - \hat{\lambda}_i)^2 - g^{ii} c^2 \} = 0$$

となり、固有値は  $\hat{\lambda}_1 = U_i$  (3 重根)、 $\hat{\lambda}_2 = U_i + \sqrt{g^{ii}} c$ 、 $\hat{\lambda}_3 = U_i - \sqrt{g^{ii}} c$  となる。

これらの式は  $\xi$  空間内の特性曲線  $d\xi_i/dt = U_i$ ,  $d\xi_i/dt = U_i + \sqrt{g^{ii}}c$ ,  $d\xi_i/dt = U_i - \sqrt{g^{ii}}c$  に沿う内微分  $\partial/\partial t + U_i\partial/\partial\xi_i$ ,  $\partial/\partial t + (U_i + \sqrt{g^{ii}}c)\partial/\partial\xi_i$ ,  $\partial/\partial t + (U_i - \sqrt{g^{ii}}c)\partial/\partial\xi_i$  のいずれか 1 つのみを含む常微分方程式で, 写像空間の特性曲線に沿って伝播するエントロピー波, 圧力波または剪断波を表している.

### 17.3.3 一般曲線座標系の質量流束のオイラー方程式

一般曲線座標系の質量流束の運動方程式から構成される Euler 方程式の場合にも, 流束を線形化し, そのヤコビ行列を対角化することができる.

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.85a)$$

$$\tilde{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho U_1 U_i + g^{1i} p \\ \rho U_2 U_i + g^{2i} p \\ \rho U_3 U_i + g^{3i} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.85b)$$

$\tilde{F}_i$  は  $\tilde{q}$  の成分の 1 次の同次式であるから

$$d\tilde{F}_i = \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} = \tilde{A}_i d\tilde{q}, \quad \tilde{F}_i = \tilde{A}_i \tilde{q}, \quad d\tilde{A}_i \tilde{q} = 0 \quad (17.86)$$

となり<sup>33</sup>, 式 (17.85) は次のように線形化することができる.

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \tilde{A}_i \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (17.87a)$$

ただし  $\tilde{A}_i = \partial \tilde{F}_i / \partial \tilde{q}$  はヤコビ行列で

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \\ -U_1 U_i + g^{1i} \phi^2 & \tilde{D}_{i1} & \delta_{2i} U_1 - \tilde{\gamma} g^{1i} \alpha_2 & \delta_{3i} U_1 - \tilde{\gamma} g^{1i} \alpha_3 & \tilde{\gamma} g^{1i} \\ -U_2 U_i + g^{2i} \phi^2 & \delta_{1i} U_2 - \tilde{\gamma} g^{2i} \alpha_1 & \tilde{D}_{i2} & \delta_{3i} U_2 - \tilde{\gamma} g^{2i} \alpha_3 & \tilde{\gamma} g^{2i} \\ -U_3 U_i + g^{3i} \phi^2 & \delta_{1i} U_3 - \tilde{\gamma} g^{3i} \alpha_1 & \delta_{2i} U_3 - \tilde{\gamma} g^{3i} \alpha_2 & \tilde{D}_{i3} & \tilde{\gamma} g^{3i} \\ -H U_i + \phi^2 U_i & \delta_{1i} H - \tilde{\gamma} \alpha_1 U_i & \delta_{2i} H - \tilde{\gamma} \alpha_2 U_i & \delta_{3i} H - \tilde{\gamma} \alpha_3 U_i & \gamma U_i \end{pmatrix} \quad (17.87b)$$

<sup>33</sup>  $\tilde{F}_i$  の成分を  $\tilde{q}$  の成分で表せば

$$J(\rho U_1 U_i + g^{1i} p) = \frac{(J\rho U_1)(J\rho U_i)}{J\rho} + g^{1i} \left\{ \tilde{\gamma} J e - \frac{\tilde{\gamma}}{2J\rho} (J\rho \mathbf{u})^2 \right\}$$

$$J\rho H U_i = \frac{J\rho U_i}{J\rho} \left\{ \gamma J e - \frac{\tilde{\gamma}}{2J\rho} (J\rho \mathbf{u})^2 \right\}$$

ただし

$$(J\rho \mathbf{u})^2 = g_{11}(J\rho U_1)^2 + g_{22}(J\rho U_2)^2 + g_{33}(J\rho U_3)^2 + 2g_{23}(J\rho U_2)(J\rho U_3) + 2g_{31}(J\rho U_3)(J\rho U_1) + 2g_{12}(J\rho U_1)(J\rho U_2)$$

また

$$\frac{1}{2J\rho} \frac{\partial (J\rho \mathbf{u})^2}{\partial J\rho U_1} = g_{11} U_1 + g_{12} U_2 + g_{13} U_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_j} U_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \cdot \mathbf{u} \equiv \alpha_1$$

$\tilde{D}_{ij} = U_i + \delta_{ji}U_j - \tilde{\gamma}g^{ji}\alpha_j$ ,  $\alpha_i = (\partial x_k/\partial \xi_i)u_k = g_{ij}U_j$  である .

式 (17.87) に対応する非保存形方程式の未知変数ベクトル  $\tilde{q}^*$  は , 下記の式 (17.89b) のように置くのが適当であろう . このとき保存形から非保存形への変換の行列  $\tilde{N} = J\partial\tilde{q}^*/\partial\tilde{q}$  とその逆行列  $\tilde{N}^{-1}$  は次のようになる<sup>34</sup> .

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -U_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -U_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}\alpha_1 & -\tilde{\gamma}\alpha_2 & -\tilde{\gamma}\alpha_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.88a)$$

$$\tilde{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ U_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ U_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \mathbf{u}^2/2 & \rho\alpha_1 & \rho\alpha_2 & \rho\alpha_3 & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.88b)$$

この質量流束の非保存形 Euler 方程式は , 式 (17.87) の左から  $\tilde{N}/J$  を演算したもので次のようになる .

$$\frac{\partial\tilde{q}^*}{\partial t} + \tilde{A}_i^* \frac{\partial\tilde{q}^*}{\partial\xi_i} = 0 \quad (17.89a)$$

$$\tilde{q}^* = \begin{pmatrix} \rho \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ p \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_i^* = \begin{pmatrix} U_i & \delta_{1i}\rho & \delta_{2i}\rho & \delta_{3i}\rho & 0 \\ 0 & U_i & 0 & 0 & g^{1i}/\rho \\ 0 & 0 & U_i & 0 & g^{2i}/\rho \\ 0 & 0 & 0 & U_i & g^{3i}/\rho \\ 0 & \delta_{1i}\rho c^2 & \delta_{2i}\rho c^2 & \delta_{3i}\rho c^2 & U_i \end{pmatrix} \quad (17.89b)$$

$\tilde{q}^*$  はこの場合の未知変数ベクトル , 行列  $\tilde{A}_i^* = \tilde{N}\tilde{A}_i\tilde{N}^{-1}$  である<sup>35</sup> .

行列  $\tilde{A}_i^*$  は簡単で容易に対角化でき , これより  $\tilde{A}_i$  も対角化できる .

$$\tilde{A}_i = \tilde{N}^{-1}\tilde{A}_i^*\tilde{N} = \tilde{N}^{-1}\tilde{R}_i^*\tilde{A}_i\tilde{L}_i^*\tilde{N} = \tilde{R}_i\tilde{A}_i\tilde{L}_i \quad (17.90)$$

<sup>34</sup>  $\tilde{q}^*$  の成分を  $\tilde{q}$  の成分で表せば

$$\rho = J\rho/J, \quad U_1 = J\rho U_1/J\rho, \quad p = \tilde{\gamma}J e/J - \tilde{\gamma}(J\rho\mathbf{u})^2/2JJ\rho$$

( $J\rho\mathbf{u}$ )<sup>2</sup> については前注参照 . 逆行列は , まず  $|N|$  の第 2, 3, 4 行に  $\rho$  を掛け , 第 5 行を  $\tilde{\gamma}$  で割り , それから次の関係を用いれば容易に求めることができる .

$$\alpha_j U_j = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\xi_j} \cdot \mathbf{u} U_j = \mathbf{u}^2, \quad -\frac{\phi^2}{\tilde{\gamma}} + \alpha_j U_j = \frac{\mathbf{u}^2}{2}$$

<sup>35</sup>  $\tilde{\gamma}H = c^2 + \phi^2$ ,  $\alpha_j g^{ji} = U_i$



$\tilde{A}_i^*$  の特性条件と固有値は上記の  $\hat{A}_i^*$  のものと同じになり,  $\tilde{\Lambda}_i, \tilde{L}_i, \tilde{R}_i$  は次のようになる.

$$\tilde{\Lambda}_i = \hat{\Lambda}_i \quad (17.91a)$$

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & -\delta_{2i}g^{12}/g^{22} & -\delta_{3i}g^{13}/g^{33} & \delta_{1i}\sqrt{g^{11}}/\rho c \\ 0 & -\delta_{1i}g^{21}/g^{11} & 1 & -\delta_{3i}g^{23}/g^{33} & \delta_{2i}\sqrt{g^{22}}/\rho c \\ 0 & -\delta_{1i}g^{31}/g^{11} & -\delta_{2i}g^{32}/g^{22} & 1 & \delta_{3i}\sqrt{g^{33}}/\rho c \\ 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & -\sqrt{g^{ii}}/\rho c \end{pmatrix} \tilde{N} \quad (17.91b)$$

$$\tilde{R}_i = \tilde{N}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \delta_{1i}\rho/2\sqrt{g^{11}}c & \delta_{2i}\rho/2\sqrt{g^{22}}c & \delta_{3i}\rho/2\sqrt{g^{33}}c & -\rho/2\sqrt{g^{ii}}c \\ 0 & 1-\delta_{1i}/2 & \delta_{2i}g^{12}/2g^{22} & \delta_{3i}g^{13}/2g^{33} & g^{1i}/2g^{ii} \\ 0 & \delta_{1i}g^{21}/2g^{11} & 1-\delta_{2i}/2 & \delta_{3i}g^{23}/2g^{33} & g^{2i}/2g^{ii} \\ 0 & \delta_{1i}g^{31}/2g^{11} & \delta_{2i}g^{32}/2g^{22} & 1-\delta_{3i}/2 & g^{3i}/2g^{ii} \\ 0 & \delta_{1i}\rho c/2\sqrt{g^{11}} & \delta_{2i}\rho c/2\sqrt{g^{22}} & \delta_{3i}\rho c/2\sqrt{g^{33}} & -\rho c/2\sqrt{g^{ii}} \end{pmatrix} \quad (17.91c)$$

非保存形の式 (17.89) と等価な常微分方程式系は, この式の左から左固有ベクトル  $\tilde{L}_i^*$  を演算することによって求められるが, この常微分方程式系は保存形の式 (17.85) の左から  $\tilde{L}_i/J$  を演算したものである.

$$\frac{\tilde{L}_i}{J} \left( \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \xi_i} \right) = \tilde{L}_i^* \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial t} + \hat{\Lambda}_i \tilde{L}_i^* \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (17.92)$$

なおこの常微分方程式系の個々の式は, 当然のことながら式 (17.84) すなわち写像空間の特性曲線に沿って伝播するエントロピー波, 圧力波, 剪断波の式になる.

$$\begin{array}{ccccc} \text{式 (17.77)} & \xrightarrow{N/J} & \text{式 (17.80)} & \xrightarrow{\hat{\Lambda}_i^*} & \text{式 (17.83)} \\ \downarrow B & & & & \downarrow \\ \text{式 (17.85)} & \xrightarrow{\tilde{N}/J} & \text{式 (17.89)} & \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_i^*} & \text{式 (17.92)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \lrcorner \\ \lrcorner \end{array} \right\} =$$

## 17.4 △形陰解法

圧縮性流れの計算には△形陰解法 (delta-form implicit method) が広く用いられている. その理由はいくつかあるが, △形にすることにより対流項が精度に無関係に1次上流差分で近似でき計算が安定になること, また△形では近似因子法などの適用が可能になり計算量を大幅に削減できることである. 圧縮性流れのクーラン数は各座標方向に伝播するエントロピー波, 圧力波, 剪断波などに対して定義され,  $CFL = \max|\lambda_i \Delta t / \Delta x_i|$  または  $\max|\hat{\lambda}_i \Delta t / \Delta \xi_i|$  のようになる. 圧縮性流れでは一般にクーラン数の制約が非常にきびしいが, それは衝撃波の捕獲のために細かい格子を用いることや, 速度  $\lambda_i$  が壁近くでも音速の大きさであることによる. △形陰解法に後述の近似因子法を組み合わせればクーラン数はかなり大きく取ることができ, 計算量は更に削減されることになる.

デカルト座標系における Navier-Stokes 方程式 (17.51) の△形陰解法の式は, 定常流れと非定常流れに対

しそれぞれ次のようになる .

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i^n + D_i) \right\} \Delta q^n = rhs^n \quad (17.93)$$

$$rhs = -\Delta t \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + D + g \right),$$

$$q^{n+1} = q^n + \Delta q^n$$

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i^n + D_i) \right\} \Delta q^{(m)} = -(q^{(m-1)} - q^n) + \frac{1}{2} (rhs^n + rhs^{(m-1)}) \quad (17.94)$$

$$q^{(m)} = q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)}$$

また一般曲線座標系における Navier-Stokes 方程式 (17.65) の  $\Delta$  形陰解法の式は , 定常流れと非定常流れに対しそれぞれ次のようになる .

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{A}_i^n + \tilde{D}_i) \right\} \Delta \tilde{q}^n = \widetilde{rhs}^n \quad (17.95)$$

$$\widetilde{rhs} = -\Delta t B \left( \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \hat{D} + \hat{g} \right),$$

$$\tilde{q}^{n+1} = \tilde{q}^n + \Delta \tilde{q}^n$$

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{A}_i^n + \tilde{D}_i) \right\} \Delta \tilde{q}^{(m)} = -(\tilde{q}^{(m-1)} - \tilde{q}^n) + \frac{1}{2} (\widetilde{rhs}^n + \widetilde{rhs}^{(m-1)}) \quad (17.96)$$

$$\tilde{q}^{(m)} = \tilde{q}^{(m-1)} + \Delta \tilde{q}^{(m)}$$

ただし  $\partial(D_i \Delta q)/\partial x_i$ ,  $\partial(\tilde{D}_i \Delta \tilde{q})/\partial \xi_i$  は拡散項の主要部 , また左辺の演算子  $\partial/\partial x_i$  は  $\Delta q$  に , また  $\partial/\partial \xi_i$  は  $\Delta \tilde{q}$  にも作用していることに注意すべきである .

上式に関しては 16.3.2 項に述べた 1 次元流れの場合とほぼ同じことが言える . 定常流れの式 (17.93)(17.95) は , 反復法によって解かれる . その右辺は式 (17.51)(17.65) の残差 ,  $\Delta q^n$ ,  $\Delta \tilde{q}^n$  はその修正値を意味し , 解が定常流れに漸近すれば , 残差は零に近づき , 同時に修正値も零に近づく . したがって左辺の演算子は , 解の精度には無関係で , 安定性と計算の容易さから 1 次上流差分で近似され , 拡散項が適当に省略され , また近似因子法が適用される . 他方 右辺は解の精度に直接関係するので正確に計算しなければならない . 非定常流れの式 (17.94)(17.96) も 非定常流れの各時間ステップごとに 反復計算によって解かれる . この式は時間間隔  $\Delta t$  における修正値  $\Delta q^n$  を  $(q^{(m-1)} - q^n) + \Delta q^{(m)}$  のように分け , その既知の部分  $q^{(m-1)} - q^n$  を陽的に , 未知の部分  $\Delta q^{(m)}$  を陰的に求めるものである . 曲線座標格子の  $\Delta \tilde{q}^n$  についても同様である . この時間ステップごとの反復計算は数回で十分収束する .

これらの  $\Delta$  形陰解法の式は , 次節に述べる流束差分分離法または 17.5 節に述べる有限体積法を適用して解かれる . これらの節には 3 次の Chakravarthy-Osher 型スキームとそれを高次にしたものについて述べる . 衝撃波の捕獲という観点からは 2 次ないし 3 次スキームで十分である . 他方 滑り面や境界面などのいわゆる弱い不連続の鮮明な捕獲には高次スキームの使用が現状では不可欠である . 弱い不連続は上流の不連続が下流に伝播または過去の不連続が未来に伝播するものでいったん拡散してしまうと修復不能であり , 格子を細かくしても数値的拡散を減らすことは難しく , スキームを高次化して流れの急激な変化に柔軟に対応させることが必要になる .

## 17.5 流束差分分離法

本節では第 16 章に述べた 1 次元流れの流束差分分離法を多次元に拡張する．まず Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームの流束差分分離法の式を示し，この式中にあらわれる分離流束差分の計算式をデカルト座標格子と曲線座標格子に対し導出する．また流束差分分離法の高次化についても述べる．以下の記述に疑問が生じたときには 16 章を参照してください．

### 17.5.1 Chakravarthy-Osher 型 TVD スキーム

一般に保存形差分スキームは次のように書くことができる．

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_l = \frac{1}{\Delta x}(H_{l+1/2} - H_{l-1/2}) \quad (17.97)$$

ここに  $H_{l+1/2}$  は数値流束で，3 次の Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームでは次のようになる．

$$H_{l+1/2} = H_{l+1/2}^{(1)} + \frac{1}{6}\Delta\tilde{F}_{l-1/2}^+ + \frac{1}{3}\Delta\tilde{F}_{l+1/2}^+ - \frac{1}{6}\Delta\tilde{F}_{l+3/2}^- - \frac{1}{3}\Delta\tilde{F}_{l+1/2}^- \quad (17.98a)$$

$$\Delta\tilde{F}_{j+1/2}^\pm = \text{minmod}(\Delta F_{j+1/2}^\pm, b\Delta F_{j-1/2}^\pm) \quad (j = l, l+1) \quad (17.98b)$$

$$\Delta\tilde{F}_{j+1/2}^\pm = \text{minmod}(\Delta F_{j+1/2}^\pm, b\Delta F_{j+3/2}^\pm) \quad (j = l-1, l)$$

$$H_{l+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(F_l + F_{l+1}) - \frac{1}{2}(\Delta F_{l+1/2}^+ - \Delta F_{l+1/2}^-) \quad (17.98c)$$

ただし  $\text{minmod}$  は  $\text{minmod}(x, y) = \text{sign}(x) \max[0, \min\{|x|, \text{sign}(x)y\}]$  のように定義される制限関数である．式 (17.98) の数値流束  $H$  は TVD 安定な 1 次上流差分の  $H^{(1)}$  とそれを 3 次にする補正項からなり，補正項の大きさは解が TVD 安定になるように  $\text{minmod}$  関数によって制限されている．また式 (17.101a) では，流束ベクトル分離法 (flux-vector splitting) により，流束  $F$  が  $x$  の正または負の向きに伝播する波の流束  $F^+$  と  $F^-$  に分離され， $F_{l+1/2}^\pm$  の値が上流側に片寄った点の  $F$  の値すなわち正方向の波に対しては  $F_{l-1}^+$ ,  $F_l^+$ ,  $F_{l+1}^+$  の値，また負方向の波に対しては  $F_l^-$ ,  $F_{l+1}^-$ ,  $F_{l+2}^-$  の値をもとに補間式のようなものによって求められると解釈できる．

式 (17.98) の流束差分  $\Delta F^\pm$  は単純に  $\Delta F^\pm = (RA^\pm L\Delta q)$  と置けば，周知のように計算結果が不自然に振舞うことがある．それは例えば位相速度  $u-c$  の圧力波は，音速点でその符号が変わるため，ここで式 (17.101a) 内の補間式が壊れてしまうからである．あるいは翼面上に発達する境界層中の横断方向の流速  $v$  の符号の変わる場所でも同様の不自然な振舞いの起きることがある．ここではこのような振舞いが起きないように，次のいずれかによって線形化対角化を行うことにする．

$$\Delta F_{j+1/2}^\pm = (RA^\pm L)_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2} \quad (17.99a)$$

$$\Delta F_{j+1/2}^\pm = R_{j+1/2} |\text{sign} A_{l+1/2}^\pm| (AL^* \Delta q^*)_{j+1/2} \quad (17.99b)$$

第 1 式は， $A = RAL$  を  $l+1/2$  の値で代表しようというものである．この近似により精度は形式的に 2 次に落ちるが実質的にはあまり変わらない．それは基の方程式が準線形 (quasilinear) で  $A$  がその係数であることによる．第 2 式は精度が落ちないように  $A_{l+1/2}$  の符号のみを用いるものである．これら両者の計算結果は通常ほとんど違わない．

一般曲線座標系では保存形差分スキームは次のように書かれる．

$$(\partial \mathfrak{F} / \partial x)_l = \hat{H}_{l+1/2} - \hat{H}_{l-1/2} \quad (17.100)$$

ただし  $\mathfrak{F} \equiv \hat{F}$  ,  $\hat{H}_{l+1/2}$  は数値流束で 3 次の Chakravathy-Osher 型 TVD スキームでは次のようになる．

$$\hat{H}_{l+1/2} = \hat{H}_{l+1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} \Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{l-1/2}^+ + \frac{1}{3} \Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{l+1/2}^+ - \frac{1}{6} \Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{l+3/2}^- - \frac{1}{3} \Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{l+1/2}^- \quad (17.101a)$$

$$\Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{j+1/2}^\pm = \text{minmod}(\Delta \mathfrak{F}_{j+1/2}^\pm, b \Delta \mathfrak{F}_{j-1/2}^\pm) \quad (j = l, l+1) \quad (17.101b)$$

$$\Delta \tilde{\mathfrak{F}}_{j+1/2}^\pm = \text{minmod}(\Delta \mathfrak{F}_{j+1/2}^\pm, b \Delta \mathfrak{F}_{j+3/2}^\pm) \quad (j = l-1, l) \quad (17.101c)$$

$$\hat{H}_{l+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{F}_l + \mathfrak{F}_{l+1}) - \frac{1}{2} (\Delta \mathfrak{F}_{l+1/2}^+ - \Delta \mathfrak{F}_{l+1/2}^-) \quad (17.101c)$$

## 17.5.2 流束差分の計算

始めに波の伝播方向によって分離された流束差分，式 (17.99a) の値を求める計算式を導出する．非保存形の変数  $\Delta q^* = N_{l+1/2} \Delta q_{j+2/1}$  の差分は次のようになる．

$$\Delta q_{j+2/1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}u_1 & -\tilde{\gamma}u_2 & -\tilde{\gamma}u_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_{l+1/2} \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta(\rho u_1) \\ \Delta(\rho u_2) \\ \Delta(\rho u_3) \\ \Delta e \end{pmatrix}_{j+1/2} = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta M_1/\rho \\ \Delta M_2/\rho \\ \Delta M_3/\rho \\ \Delta P \end{pmatrix} \quad (17.102)$$

ただし

$$\Delta M_i = \begin{pmatrix} -u_i & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \phi^2 & -\tilde{\gamma}u_1 & -\tilde{\gamma}u_2 & -\tilde{\gamma}u_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}$$

ここでは差分は  $j+1/2$  のもの，その他の変数は  $l+1/2$  のものを取ることにする．また非保存形の行列  $A_i^{*\pm} = R_i^* \Lambda_i^\pm L_i^*$  は次のようになる．

$$A_i^{*\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}^\pm & \delta_{1i} \lambda_{ia}^\pm \rho / c & \delta_{2i} \lambda_{ia}^\pm \rho / c & \delta_{3i} \lambda_{ia}^\pm \rho / c & \lambda_{ib}^\pm / c^2 \\ 0 & \lambda_{i1}^\pm + \delta_{1i} \lambda_{ib}^\pm & 0 & 0 & \delta_{1i} \lambda_{ia}^\pm / \rho c \\ 0 & 0 & \lambda_{i1}^\pm + \delta_{2i} \lambda_{ib}^\pm & 0 & \delta_{2i} \lambda_{ia}^\pm / \rho c \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{i1}^\pm + \delta_{3i} \lambda_{ib}^\pm & \delta_{3i} \lambda_{ia}^\pm / \rho c \\ 0 & \delta_{1i} \lambda_{ia}^\pm \rho c & \delta_{2i} \lambda_{ia}^\pm \rho c & \delta_{3i} \lambda_{ia}^\pm \rho c & \lambda_{i1}^\pm + \lambda_{ib}^\pm \end{pmatrix} \quad (17.103)$$

ただし  $\lambda_{i1} = u_i$  ,  $\lambda_{i2} = u_i + c$  ,  $\lambda_{i3} = u_i - c$  ,  $\lambda_{ij}^\pm = (\lambda_{ij} \pm |\lambda_{ij}|) / 2$  ,  $\lambda_{ia}^\pm = (\lambda_{i2}^\pm - \lambda_{i3}^\pm) / 2$  ,  $\lambda_{ib}^\pm = (\lambda_{i2}^\pm + \lambda_{i3}^\pm) / 2 - \lambda_{i1}^\pm$  である．この式はまず  $A_1^{*\pm}$  を計算し，次にこれより  $A_2^{*\pm}$  ,  $A_3^{*\pm}$  を推定し，これらを Kronecker のデルタ関

数を用いて重ね合わせれば容易に導くことができる．これらの式から

$$(A_i^{*\pm})_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2}^* = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}^{\pm} \Delta \rho + \lambda_{ia} \frac{1}{c} \Delta M_i + \lambda_{ib}^{\pm} \frac{1}{c^2} \Delta P \\ \lambda_{i1}^{\pm} \frac{1}{\rho} \Delta M_1 + \lambda_{ia} \frac{\delta_{1i}}{\rho c} \Delta P + \lambda_{ib}^{\pm} \frac{\delta_{1i}}{\rho} \Delta M_1 \\ \lambda_{i1}^{\pm} \frac{1}{\rho} \Delta M_2 + \lambda_{ia} \frac{\delta_{2i}}{\rho c} \Delta P + \lambda_{ib}^{\pm} \frac{\delta_{2i}}{\rho} \Delta M_2 \\ \lambda_{i1}^{\pm} \frac{1}{\rho} \Delta M_3 + \lambda_{ia} \frac{\delta_{3i}}{\rho c} \Delta P + \lambda_{ib}^{\pm} \frac{\delta_{3i}}{\rho} \Delta M_3 \\ \lambda_{i1}^{\pm} \Delta P + \lambda_{ia} c \Delta M_i + \lambda_{ib}^{\pm} \Delta P \end{pmatrix}$$

更に  $(\Delta F_i^{\pm})_{j+1/2} = (N^{-1} A_i^{*\pm})_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2}^*$  を計算すれば，デカルト座標格子の場合の分離流束差分の計算式が次のように求められる<sup>36 37</sup>．

$$\begin{aligned} (\Delta F_i^{\pm})_{j+1/2} &= (R_i A_i^{\pm} L_i)_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2} \\ &= \lambda_{i1}^{\pm} \Delta q + \left\{ \lambda_{ib}^{\pm} \Delta M_i + \lambda_{ia}^{\pm} \frac{\Delta P}{c} \right\} q_{ai} + \left\{ \lambda_{ia}^{\pm} \Delta M_i + \lambda_{ib}^{\pm} \frac{\Delta P}{c} \right\} q_b \end{aligned} \quad (17.104a)$$

( $i = 1, 2, 3; j = l, l \pm 1$ )

ただし

$$\begin{aligned} \lambda_{i1} &= u_i, \quad \lambda_{i2} = u_i + c, \quad \lambda_{i3} = u_i - c, \\ \lambda_{ij}^{\pm} &= (\lambda_{ij} \pm |\lambda_{ij}|) / 2, \quad \lambda_{ia}^{\pm} = (\lambda_{i2}^{\pm} - \lambda_{i3}^{\pm}) / 2, \quad \lambda_{ib}^{\pm} = (\lambda_{i2}^{\pm} + \lambda_{i3}^{\pm}) / 2 - \lambda_{i1}^{\pm}, \\ \Delta M_i &= \begin{pmatrix} -u_i & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}, \\ \Delta P &= \begin{pmatrix} \phi^2 & -\tilde{\gamma} u_1 & -\tilde{\gamma} u_2 & -\tilde{\gamma} u_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}, \end{aligned} \quad (17.104b)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad q_{ai} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \\ u_i \end{pmatrix}, \quad q_b = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ H \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

<sup>36</sup> この計算には次の関係が用いられた．

$$\tilde{\gamma} = \gamma - 1, \quad \phi^2 = \tilde{\gamma} \frac{\mathbf{u}^2}{2}, \quad \frac{\mathbf{u}^2}{2} \Delta \rho + u_j \Delta M_j + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \Delta P = \Delta e, \quad \frac{c^2}{\tilde{\gamma}} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} = H$$

<sup>37</sup> 蛇足を加えれば，式 (17.98) の流束差分は  $i = 1$  の場合に次のようになる．

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{F}_1^+)_{l-1/2} &= \lambda_{11}^+ \Delta \tilde{q} + (\lambda_{1b}^+ \Delta \tilde{M}_1 + \lambda_{1a}^+ \Delta \tilde{P}/c) q_{a1} + (\lambda_{1a}^+ \Delta \tilde{M}_1 + \lambda_{1b}^+ \Delta \tilde{P}/c) q_b \\ \Delta \tilde{M}_1 &= -u \Delta \tilde{\rho} + \Delta \tilde{\rho} u, \\ \Delta \tilde{P} &= \phi^2 \Delta \tilde{\rho} - \tilde{\gamma} (u \Delta \tilde{\rho} u + v \Delta \tilde{\rho} v + w \Delta \tilde{\rho} w) + \tilde{\gamma} \Delta \tilde{e} \\ \Delta \tilde{\rho} u_{l-1/2} &= \text{minmod}(\Delta(\rho u)_{l-1/2}, b \Delta(\rho u)_{l+1/2}) \end{aligned}$$

分離流束差分の式 (17.99b) の計算式は, この式に対しては  $\Delta M_i = \rho \Delta u_i$ ,  $\Delta P = \Delta p$ ,  $N \Delta q \equiv \Delta q^*$  であるから次のようになる.

$$\begin{aligned}
(\Delta F_i^\pm)_{j+1/2} &= (R_i)_{j+1/2} |\text{sign} A_i^\pm|_{l+1/2} (A_i L_i^* \Delta q^*)_{j+1/2} \\
&= |\text{sign} \lambda_{i1}^\pm|_{l+1/2} [\lambda_{i1} \{ \Delta q - \rho \Delta u_i q_{ai} - (\Delta p/c) q_b \}]_{j+1/2} \\
&\quad + |\text{sign} \lambda_{i2}^\pm|_{l+1/2} \left[ \lambda_{i2} \frac{1}{2} \{ (\rho \Delta u_i + \Delta p/c) q_{ai} + (\rho \Delta u_i + \Delta p/c) q_b \} \right]_{j+1/2} \\
&\quad + |\text{sign} \lambda_{i3}^\pm|_{l+1/2} \left[ \lambda_{i3} \frac{1}{2} \{ (\rho \Delta u_i - \Delta p/c) q_{ai} - (\rho \Delta u_i - \Delta p/c) q_b \} \right]_{j+1/2}
\end{aligned} \tag{17.105}$$

次に曲線座標格子の場合の分離流束差分の式 (17.99a) の値を求める計算式を導出する. なおここでは  $\hat{\cdot}$  の付いている文字の代わりに Fraktur 体文字を用いることにする.  $\hat{F} = \mathfrak{F}$ ,  $\hat{q} = \mathfrak{q}$ ,  $\hat{A} = \mathfrak{A}$ ,  $\hat{\lambda} = \mathfrak{e}$ . 非保存形の変数  $q^*$  はデカルト座標系のもと同じである.  $\Delta q^* = \Delta q^*$ . また行列  $\mathfrak{A}_i^{*\pm} = \mathfrak{A}_i^* \mathfrak{R}_i^\pm \mathfrak{Q}_i^*$  は次のようになる.

$$\mathfrak{A}_i^{*\pm} = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_{i1}^\pm & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,1}\rho}{\sqrt{g^{ii}c}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,2}\rho}{\sqrt{g^{ii}c}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,3}\rho}{\sqrt{g^{ii}c}} & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{1}{c^2} \\ 0 & \mathfrak{e}_{i1}^\pm + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,1}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,1}\xi_{i,2}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,1}\xi_{i,3}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,1}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \\ 0 & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,2}\xi_{i,1}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{i1}^\pm + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,2}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,2}\xi_{i,3}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,2}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \\ 0 & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,3}\xi_{i,1}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,3}\xi_{i,2}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{i1}^\pm + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,3}}{g^{ii}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,3}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \\ 0 & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,1}\rho c}{\sqrt{g^{ii}}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,2}\rho c}{\sqrt{g^{ii}}} & \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,3}\rho c}{\sqrt{g^{ii}}} & \mathfrak{e}_{i1}^\pm + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \end{pmatrix} \tag{17.106}$$

これより

$$(\mathfrak{A}_i^{*\pm})_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_{i1}^\pm \Delta \rho + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{1}{\sqrt{g^{ii}c}} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{1}{c^2} \Delta P \\ \mathfrak{e}_{i1}^\pm \frac{1}{\rho} \Delta M_1 + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,1}}{g^{ii}\rho} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,1}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \Delta P \\ \mathfrak{e}_{i1}^\pm \frac{1}{\rho} \Delta M_2 + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,2}}{g^{ii}\rho} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,2}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \Delta P \\ \mathfrak{e}_{i1}^\pm \frac{1}{\rho} \Delta M_3 + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{\xi_{i,3}}{g^{ii}\rho} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{\xi_{i,3}}{\sqrt{g^{ii}\rho c}} \Delta P \\ \mathfrak{e}_{i1}^\pm \Delta P + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{c}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \Delta P \end{pmatrix}$$

ただし

$$\Delta \mathfrak{M}_i = \xi_{i,k} \Delta M_k = \begin{pmatrix} -U_i & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}$$

更に  $(\Delta \mathfrak{F}_i^\pm)_{j+1/2} = (JN^{-1} \mathfrak{A}_i^{*\pm})_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2}^*$  を計算すれば, 曲線座標格子の場合の分離流束差分の計算式が次のように求められる.

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathfrak{F}_i^\pm)_{j+1/2} &= (J \mathfrak{A}_i^\pm)_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2} \\
&= J \mathfrak{e}_{i1}^\pm \Delta q + J \left\{ \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{1}{c} \Delta P \right\} q_{ai} + J \left\{ \mathfrak{e}_{ia}^\pm \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta \mathfrak{M}_i + \mathfrak{e}_{ib}^\pm \frac{1}{c} \Delta P \right\} q_b
\end{aligned} \tag{17.107a}$$

( $i = 1, 2, 3; j = l, l \pm 1$ )

ただし

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{t}_{i1} &= U_i, \quad \mathfrak{t}_{i2} = U_i + \sqrt{g^{ii}} c, \quad \mathfrak{t}_{i3} = U_i - \sqrt{g^{ii}} c, \\
 \mathfrak{t}_{ij}^{\pm} &= (\mathfrak{t}_{ij} \pm |\mathfrak{t}_{ij}|)/2, \quad \mathfrak{t}_{ia}^{\pm} = (\mathfrak{t}_{i2}^{\pm} - \mathfrak{t}_{i3}^{\pm})/2, \quad \mathfrak{t}_{ib}^{\pm} = (\mathfrak{t}_{i2}^{\pm} + \mathfrak{t}_{i3}^{\pm})/2 - \mathfrak{t}_{i1}^{\pm}, \\
 \Delta \mathfrak{M}_i &= \xi_{i,k} \Delta M_k = \begin{pmatrix} -U_i & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}, \\
 \Delta P &= \begin{pmatrix} \phi^2 & -\tilde{\gamma} u_1 & -\tilde{\gamma} u_2 & -\tilde{\gamma} u_3 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}_{l+1/2} \cdot \Delta q_{j+1/2}, \tag{17.107b} \\
 q &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad q_{ai} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{i,1} \\ \xi_{i,2} \\ \xi_{i,3} \\ U_i \end{pmatrix}, \quad q_b = q_b = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ H \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

なおここでも差分は  $j+1/2$  のもの，その他の変数は  $l+1/2$  のものを取ることにする．この場合の分離流束差分が， $(\Delta \mathfrak{F}_i^{\pm})_{j+1/2} = (\mathfrak{A}_i^{\pm})_{l+1/2} \Delta q_{j+1/2}$  ではなく式 (17.107a) のように置かれたのは， $\mathfrak{A}_i^{\pm}$  の格子依存性が大きいのに対し， $J \mathfrak{A}_i^{\pm}$  は  $\xi_i$  方向に格子依存性がほとんどなく，点  $(\xi_i)_{l+1/2}$  の値で代表させても誤差があまり生じないことによる．

分離流束差分の式 (17.99b) の計算式は， $\Delta \mathfrak{M}_i = \rho \xi_{i,k} \Delta u_k \equiv \rho \Delta U_i$ ， $\Delta P = \Delta p$  であるから次のようになる．

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathfrak{F}_i^{\pm})_{j+1/2} &= (\mathfrak{R}_i)_{j+1/2} |\text{sign} \mathfrak{R}_i^{\pm}|_{l+1/2} (J \mathfrak{R}_i \mathfrak{L}_i^* \Delta q^*)_{j+1/2} \\
 &= |\text{sign} \mathfrak{t}_{i1}^{\pm}|_{l+1/2} \left[ J \mathfrak{t}_{i1} \left\{ \Delta q - \frac{\rho}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta U_i q_{ai} - \frac{1}{c} \Delta p q_b \right\} \right]_{j+1/2} \\
 &+ |\text{sign} \mathfrak{t}_{i2}^{\pm}|_{l+1/2} \left[ J \mathfrak{t}_{i2} \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\rho}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta U_i + \frac{1}{c} \Delta p \right) q_{ai} + \left( \frac{\rho}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta U_i + \frac{1}{c} \Delta p \right) q_b \right\} \right]_{j+1/2} \\
 &+ |\text{sign} \mathfrak{t}_{i3}^{\pm}|_{l+1/2} \left[ J \mathfrak{t}_{i3} \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\rho}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta U_i - \frac{1}{c} \Delta p \right) q_{ai} - \left( \frac{\rho}{\sqrt{g^{ii}}} \Delta U_i - \frac{1}{c} \Delta p \right) q_b \right\} \right]_{j+1/2} \tag{17.108}
 \end{aligned}$$

式 (17.98) のスキームが TVD 安定になるためには， $b$  の値とクーラン数が次の条件を満足しなければならない． $b$  の値は，

$$1 < b \leq 4$$

によって制限され，その上限  $b = 4$  に取れば制限関数の働く範囲は最も狭くなる．またクーラン数  $CFL = |\lambda| \Delta t / \Delta x$  は

$$(1 - \theta) b_1 CFL \leq 1, \quad b_1 = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} b$$

によって制限される．完全陰解法 ( $\theta = 1$ ) ではクーラン数  $CFL$  は一応自由に選べることになる．







ただし  $b = \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2 / 2c^2$ ,  $H = c^2 / \tilde{\gamma} + \mathbf{u}^2 / 2$  である<sup>38</sup>.

他方 この場合の  $\Delta$  形陰解法の式の両辺に  $\tilde{N}/J$  を乗じた非保存形の式の左辺は次のようになる .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tilde{N}}{J} \widetilde{lhs} \right)_{ijk} &= \Delta \tilde{q}_{ijk}^* + \theta \lambda_x \left\{ -(\tilde{A}_1^{*+})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i-1,j,k}^* + |\tilde{A}_1^*|_{ijk} \Delta \tilde{q}_{ijk}^* + (\tilde{A}_1^{*-})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i+1,j,k}^* \right\} \\ &\quad + \theta \lambda_y \left\{ -(\tilde{A}_2^{*+})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i,j-1,k}^* + |\tilde{A}_2^*|_{ijk} \Delta \tilde{q}_{ijk}^* + (\tilde{A}_2^{*-})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i,j+1,k}^* \right\} \\ &\quad + \theta \lambda_z \left\{ -(\tilde{A}_3^{*+})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i,j,k-1}^* + |\tilde{A}_3^*|_{ijk} \Delta \tilde{q}_{ijk}^* + (\tilde{A}_3^{*-})_{ijk} \Delta \tilde{q}_{i,j,k+1}^* \right\} \end{aligned} \quad (17.114)$$

ただし  $\tilde{A}_i^{\pm}$  は式 (17.113) で定義されたもの , また  $\Delta \tilde{q}^*$  は次のようになる<sup>39</sup>.

$$\Delta \tilde{q}^* = \frac{\tilde{N}}{J} \Delta \tilde{q} = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta p \end{pmatrix} \quad (17.115)$$

### 17.5.3 流束差分分離法の高次コンパクト TVD スキーム

16.7.1 節に述べた高次コンパクト TVD スキームは多次元にも適用できる . ここにはその概要について述べる . 3 次 Chakravarthy-Osher 型 TVD スキームの数値流束の式 (17.98) は , その補正項に含まれるすべての  $\Delta F$  を次の  $DF$  で置き換えることによって , 高次化することができる .

$$H_{l+1/2} = H_{l+1/2}^{(1)} + \frac{1}{6} D \tilde{F}_{l-1/2}^+ + \frac{1}{3} D \tilde{F}_{l+1/2}^+ - \frac{1}{6} D \tilde{F}_{l+3/2}^- - \frac{1}{3} D \tilde{F}_{l+1/2}^- \quad (17.116a)$$

$$D \tilde{F}_{j+1/2}^\pm = \min \text{mod} (DF_{j+1/2}^\pm, bDF_{j-1/2}^\pm) \quad (j = l, l+1) \quad (17.116b)$$

$$D \tilde{F}_{j+1/2}^\pm = \min \text{mod} (DF_{j+1/2}^\pm, bDF_{j+3/2}^\pm) \quad (j = l-1, l)$$

<sup>38</sup>

$$\alpha_i \equiv g_{ij} U_j$$

$$\alpha_i U_i = \mathbf{u}^2$$

$$\alpha_i g^{ij} = \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} u_k \right) \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \right) = \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \right) \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} u_k \right) = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} u_k = U_j$$

なお最後の式で  $(\partial \xi_i / \partial x_l)(\partial x_k / \partial \xi_i)$  は  $k = l$  のときに 1 ,  $k \neq l$  のときに 0 になる .

<sup>39</sup> なおここでの  $\Delta$  は空間差分の演算子ではなく同一空間点における修正値を意味するものであるから , ヤコビアン  $J$  , 測度 , 測度テンソルは  $\Delta$  に対し定数として扱われこれを自由に出入りできる .

$$\alpha_i \Delta U_i = g_{ij} U_j \Delta U_i = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} U_j \Delta \left( \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} U_i \right) = u_k \Delta u_k = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^2$$

$$p = \tilde{\gamma} e - \rho \phi^2, \quad \Delta p = \tilde{\gamma} \Delta e - \phi^2 \Delta \rho - \rho \Delta \phi^2$$

これらの式から  $\Delta \tilde{q}^*$  の最後の要素は次のように求められる .

$$\begin{aligned} &\phi^2 \Delta \rho - \tilde{\gamma} \alpha_i \Delta \rho U_i + \tilde{\gamma} \Delta e \\ &= \phi^2 \Delta \rho - \tilde{\gamma} u_k \Delta (\rho u_k) + \Delta p + \phi^2 \Delta \rho + \rho \Delta \phi^2 \\ &= \Delta p + \tilde{\gamma} (\mathbf{u}^2 \Delta \rho + \rho u_k \Delta u_k - u_k \Delta \rho u_k) \\ &= \Delta p \end{aligned}$$

この式の minmod 制限関数のすべての  $DF$  を

$$DF_{j+1/2}^{\pm} = \Delta F_{j+1/2}^{\pm} - \frac{1}{6} \Delta^3 \bar{F}_{j+1/2}^{\pm} \quad (j = l, l \pm 1) \quad (17.117)$$

のように与えれば 4 次スキームになり、また

$$\begin{aligned} DF_{l+1/2}^{\pm} &= \Delta F_{l+1/2}^{\pm} - \frac{3}{20} \Delta^3 \bar{F}_{l+1/2}^{\pm}, \\ DF_{j+1/2}^{\mp} &= \Delta F_{j+1/2}^{\mp} - \frac{1}{5} \Delta^3 \bar{F}_{j+1/2}^{\mp} \end{aligned} \quad (j = l \pm 1) \quad (17.118)$$

ように与えれば 5 次スキームになる。この 4 次スキームは 5 次に近いもので弱い不連続を鮮明に捕獲する目的にも適っている。

この高次化に伴って、上記のスキームを TVD 安定化する 2 つの条件は修正を要することになり、また付加項  $\Delta^3 F$  も局所的不安定を招く虞があるので次のようにその大きさを制限する必要がある。

$$\begin{aligned} \Delta^3 \bar{F}_{j+1/2}^{\pm} &= \Delta^2 \tilde{F}_{j+1}^{\pm} - \Delta^2 \tilde{F}_j^{\pm} \\ \Delta^2 \tilde{F}_{j+1}^{\pm} &= \min\text{mod}(\Delta^2 F_{j+1}^{\pm}, b_2 \Delta^2 F_j^{\pm}), \\ \Delta^2 \tilde{F}_j^{\pm} &= \min\text{mod}(\Delta^2 F_j^{\pm}, b_2 \Delta^2 F_{j+1}^{\pm}), \\ \Delta^2 F_k &= \Delta F_{k+1/2} - \Delta F_{k-1/2} \end{aligned} \quad (17.119)$$

ただし  $b_2$  は  $DF$  が極値にならないように  $1 < b_2 \leq 4$  の範囲に取られる。3 次の TVD スキームでは 3 次の補正項の大きさを、この補正項のために新たな  $F$  の極値が発生しないように、勾配  $\Delta F$  の大きさを minmod 制限関数によって制限したが、この高次スキームでは高次の補正項の大きさを、この補正項のために新たな  $\Delta F$  の極値 ( $F$  の変曲点) が発生しないように曲率  $\Delta^2 F$  の大きさを制限することになる。

この高次スキームの TVD 安定条件は厳格には次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 < b &\leq 6\mathfrak{C}^{-1} - 2, \\ (1-\theta)b_1 CFL &\leq 1, \quad b_1 = 1 + \frac{1}{6}\mathfrak{C}(1+2b) \end{aligned}$$

ただし  $\mathfrak{C} = \max(Dq_k / \Delta q_k)$  である。制限補正勾配  $DF$  に変曲点が現れないためには倍率  $b_2$  の上限は次式によって制限される。

$$1 < b_2 \leq 4$$

ここで  $b_2 = 4$  に選べば、 $\mathfrak{C}$  の大きさは  $1/2 \leq \mathfrak{C} \leq 1+1/8$  となり、これよりこの高次スキームが TVD 安定になる条件は次のようになる。

$$0 < b \leq 10/3, \quad (17.120a)$$

$$(1-\theta)b_1 CFL \leq 1, \quad b_1 = 39/16 \quad (17.120b)$$

## 17.6 有限体積法

本節では第 16 章に述べた 1 次元流れの有限体積法を多次元流れに拡張する．有限体積法で解を  $\Delta t$  進める計算は 3 つの段階，すなわち再構成 (reconstruction)，発展 (evolution)，セル平均 (cell averaging) から構成される．ここではまず区分的 2 次多項式による再構成段階，次に Roe の近似リーマン解による発展段階について，それから有限体積法の高次化についても述べる．以下の記述に疑義が生じたときにはまず 16 章を参照してください．

### 17.6.1 再構成段階

始めにデカルト座標系  $xyz$  における有限体積法について述べる．その基礎微分方程式は Euler 方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

である．流れ場を格子間隔  $\Delta x \Delta y \Delta z$  の直方体格子セルに分割する．上式を  $ijk$  番目の格子セルにわたって積分すれば次式が得られる．

$$\begin{aligned} q_{ijk}^{n+1} = & q_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (H_1)_{i+1/2,j,k} - (H_1)_{i-1/2,j,k} \} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ (H_2)_{i,j+1/2,k} - (H_2)_{i,j-1/2,k} \} \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta z} \{ (H_3)_{i,j,k+1/2} - (H_3)_{i,j,k-1/2} \} \end{aligned} \quad (17.121)$$

ただし  $q_{ijk}$  は  $q(x, y, z)$  の  $ijk$  番目のセルにわたる平均値である．また  $(H_1)_{i+1/2,j,k}$  は数値流束  $F_1$  のセル境界面  $x_{i+1/2}$  にわたる平均値  $H_1(t, q_{i+1/2,j,k}^L, q_{i+1/2,j,k}^R)$  の時間間隔  $\Delta t$  における平均値として定義される．

$$q_{ijk} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dy \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} q(x, y, z) dz \quad (17.122a)$$

$$(H_1)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} H_1(t, q_{i+1/2,j,k}^L, q_{i+1/2,j,k}^R) dt \quad (17.122b)$$

$q(x, y, z)$  は各セル内で連続な  $x, y, z$  の区分的多項式で，セル境界面上では一般に不連続である．添字  $L, R$  はセル境界の左右の値を示す．

再構成段階では，セル平均値  $q_{ijk}$  を基に区分的 2 次多項式が再構成され，そのセル境界値が求められる． $ijk$  番目セルの境界  $x = x_{i+1/2}, x = x_{i-1/2}$  における  $q$  のセル断面平均値  $q_{i+1/2}^L, q_{i-1/2}^R$  は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} q_{i+1/2}^L &= q_i + \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}, b \Delta q_{i+1/2}) + \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta q_{i+1/2}, b \Delta q_{i-1/2}) \\ q_{i-1/2}^R &= q_i - \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta q_{i+1/2}, b \Delta q_{i-1/2}) - \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}, b \Delta q_{i+1/2}) \end{aligned}$$

これらは， $q$  の  $x$  一定セル断面平均値に対する区分的 2 次多項式  $q_{jk}(x) = q(x)$  を 16.5.4 項にならって再構成しそれから求めたものである． $q$  の  $y$  または  $z$  に関する区分的 2 次式のセル境界値も同様に求められる．セル境界面の左右の  $q_{l+1/2}^L, q_{l+1/2}^R$  は 3 次の有限体積法 TVD スキームでは次のようになる．

$$\begin{aligned} q_{l+1/2}^L &= q_l + \frac{1}{6} \Delta \tilde{q}_{l-1/2} + \frac{1}{3} \Delta \tilde{q}_{l+1/2}, \\ q_{l+1/2}^R &= q_{l+1} - \frac{1}{6} \Delta \tilde{q}_{l+3/2} - \frac{1}{3} \Delta \tilde{q}_{l+1/2} \end{aligned} \quad (17.123a)$$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{q}_{j+1/2} &= \text{minmod}(\Delta q_{j+1/2}, b\Delta q_{j-1/2}) & (j = l, l+1) \\ \Delta\tilde{\tilde{q}}_{j+1/2} &= \text{minmod}(\Delta q_{j+1/2}, b\Delta q_{j+3/2}) & (j = l-1, l)\end{aligned}\quad (17.123b)$$

区分的 2 次式のセル中心の値は minmod 関数が働かないときには

$$q(x_i) = q_i - \frac{1}{24}\Delta^2 q_i \quad (17.124)$$

となる．この値はセル断面  $x = x_i$  にわたる平均値で， $q(y_j)$ ， $q(z_k)$  とは一般に完全に一致しない．またセル境界  $x_{i+1/2}$  における変数  $q$  の跳躍量 (jump) は

$$\delta q_{i+1/2} = q_{i+1/2}^R - q_{i+1/2}^L = -\frac{1}{6}\Delta^3 q_{i+1/2} \quad (17.125)$$

となる．この跳躍量はもとの関数  $q(x, y, z)$  が滑らかに変化するところでは通常無視できる大きさになる．

次に曲線座標格子セルの場合について述べる．この場合の Navier-Stokes 方程式 (17.64a) に相当の Euler 方程式は次のようになる<sup>40</sup>．

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial \zeta} = 0$$

ここでは物理空間  $xyz$  内の曲線座標格子セルが写像空間  $\xi\eta\zeta$  内の単位立方体格子セル ( $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$ ) に対応付けられるものとする．上式を  $ijk$  番目の格子セルにわたって積分すれば

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{ijk}^{n+1} &= \mathbf{q}_{ijk}^n - \Delta t \{ (\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k} - (\hat{H}_1)_{i-1/2,j,k} + (\hat{H}_2)_{i,j+1/2,k} - (\hat{H}_2)_{i,j-1/2,k} \\ &\quad + (\hat{H}_3)_{i,j,k+1/2} - (\hat{H}_3)_{i,j,k-1/2} \}\end{aligned}\quad (17.126)$$

ただし  $\mathbf{q}_{ijk} = \hat{q}_{ijk}$  は  $\hat{q}(\xi, \eta, \zeta)$  の点  $\xi_i \eta_j \zeta_k$  における値ではなく  $\hat{q}(\xi, \eta, \zeta)$  の  $ijk$  番目のセルにわたる平均値，また  $(\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k}$  は数値流束  $\mathfrak{F}_1 = \hat{F}_1$  のセル境界面  $\xi_{i+1/2}$  にわたる平均値  $\hat{H}_1(t, \mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^L, \mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^R)$  の時間間隔  $\Delta t$  における平均値として次のように定義される．

$$\mathbf{q}_{ijk} = \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} d\xi \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} d\eta \int_{\zeta_{k-1/2}}^{\zeta_{k+1/2}} \mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \quad (17.127a)$$

$$(\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \hat{H}_1(t, \mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^L, \mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^R) dt \quad (17.127b)$$

$\mathbf{q}(\xi, \eta, \zeta)$  は各セル内で連続な  $\xi, \eta, \zeta$  の区分的多項式で，セル境界面上では一般に不連続である．

あるいは Navier-Stokes 方程式 (17.65a) に相当の Euler 方程式

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + B \left( \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{F}_3}{\partial \zeta} \right) = 0$$

を写像空間内の単位立方体格子セルにわたって積分すれば次式が得られる．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}}_{ijk}^{n+1} &= \tilde{\mathbf{q}}_{ijk}^n - \Delta t \{ (B\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k} - (B\hat{H}_1)_{i-1/2,j,k} + (B\hat{H}_2)_{i,j+1/2,k} - (B\hat{H}_2)_{i,j-1/2,k} \\ &\quad + (B\hat{H}_3)_{i,j,k+1/2} - (B\hat{H}_3)_{i,j,k-1/2} \} \\ &\quad + \Delta t \{ (B_{i+1/2,j,k} - B_{i-1/2,j,k})(\mathfrak{F}_1)_{ijk} + (B_{i,j+1/2,k} - B_{i,j-1/2,k})(\mathfrak{F}_2)_{ijk} \\ &\quad + (B_{i,j,k+1/2} - B_{i,j,k-1/2})(\mathfrak{F}_3)_{ijk} \}\end{aligned}\quad (17.128)$$

<sup>40</sup> 記号については 17.1.2 項参照

ただし  $\tilde{q}_{ijk}$  は  $\tilde{q}(\xi, \eta, \zeta)$  の  $ijk$  番目のセルにわたる平均値, また上式の最終項は部分積分を取る際に出てくる項で次のようなものである<sup>41</sup>.

$$B_\xi \mathfrak{F}_1 + B_\eta \mathfrak{F}_2 + B_\zeta \mathfrak{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\mu, \nu=1}^3 (\partial \xi_{x_\nu} / \partial \xi_\mu) \hat{f}_{\mu, \nu+1} \\ \sum_{\mu, \nu=1}^3 (\partial \eta_{x_\nu} / \partial \xi_\mu) \hat{f}_{\mu, \nu+1} \\ \sum_{\mu, \nu=1}^3 (\partial \zeta_{x_\nu} / \partial \xi_\mu) \hat{f}_{\mu, \nu+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\partial \xi_x / \partial \xi)_{ijk} = (\xi_x)_{i+1/2, j, k} - (\xi_x)_{i-1/2, j, k}$ , また  $\hat{f}_{12}$  は列ベクトル  $\mathfrak{F}_1$  の第 2 成分である.

再構成段階では, セル平均値  $q_{ijk}$  を基に区分的 2 次多項式が再構成されそのセル境界値が求められる.  $ijk$  番目のセルの境界  $\xi = \xi_{i+1/2}$ ,  $\xi = \xi_{i-1/2}$  における  $q$  のセル断面平均値  $q_{i+1/2}^L$ ,  $q_{i-1/2}^R$  は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} q_{i+1/2}^L &= q_i + \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}, b \Delta q_{i+1/2}) + \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta q_{i+1/2}, b \Delta q_{i-1/2}) \\ q_{i-1/2}^R &= q_i - \frac{1}{6} \min\text{mod}(\Delta q_{i+1/2}, b \Delta q_{i-1/2}) - \frac{1}{3} \min\text{mod}(\Delta q_{i-1/2}, b \Delta q_{i+1/2}) \end{aligned}$$

これらの境界値は,  $q$  の  $\xi$  一定セル断面平均値に対する区分的 2 次多項式  $q_{jk}(\xi) = q(\xi)$  を 16.5.4 項になって再構成しそれから求めたものである.  $q$  の  $\eta$  または  $\zeta$  に関する区分的 2 次式のセル境界値も同様に求められる. セル境界面の左右の  $q_{l+1/2}^L$ ,  $q_{l+1/2}^R$  は 3 次の有限体積法 TVD スキームでは次のようになる.

$$q_{l+1/2}^L = q_l + \frac{1}{6} \Delta \tilde{q}_{l-1/2} + \frac{1}{3} \Delta \tilde{q}_{l+1/2}, \quad (17.129a)$$

$$q_{l+1/2}^R = q_{l+1} - \frac{1}{6} \Delta \tilde{q}_{l+3/2} - \frac{1}{3} \Delta \tilde{q}_{l+1/2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{q}_{j+1/2} &= \min\text{mod}(\Delta q_{j+1/2}, b \Delta q_{j-1/2}) & (j = l, l+1) \\ \Delta \tilde{q}_{j+1/2} &= \min\text{mod}(\Delta q_{j+1/2}, b \Delta q_{j+3/2}) & (j = l-1, l) \end{aligned} \quad (17.129b)$$

区分的 2 次式のセル中心の値は  $\min\text{mod}$  関数が働かないときには

$$q(\xi_i) = q_i - \frac{1}{24} \Delta^2 q_i \quad (17.130)$$

となる. この値はセル断面  $\xi = \xi_i$  にわたる平均値で,  $q(\eta_j)$ ,  $q(\zeta_k)$  とは完全に一致しない. またセル境界  $\xi_{i+1/2}$  における変数  $q$  の跳躍量は

$$\delta q_{i+1/2} = q_{i+1/2}^R - q_{i+1/2}^L = -\frac{1}{6} \Delta^3 q_{i+1/2} \quad (17.131)$$

となる. この跳躍量ももとの関数  $q(\xi, \eta, \zeta)$  が滑らかに変化するところでは通常無視できる大きさになる.

41

$$\int B \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \xi} d\xi = [B \mathfrak{F}_1] - \int B_\xi \mathfrak{F}_1 d\xi$$

## 17.6.2 発展段階—Roeの近似リーマン解

セル境界面  $x_{l+1/2}$  における数値流束  $H$  は次式から求められる .

$$(H_i)_{l+1/2} = \frac{1}{2} \{ F_i(q_{l+1/2}^L) + F_i(q_{l+1/2}^R) \} - \frac{1}{2} |A_i(q_{l+1/2}^L, q_{l+1/2}^R)| \delta q \quad (17.132)$$

$q(x)$  は各セルごとに独立の  $x$  の区分的多項式で, その値はセル境界面で一般に連続にはならない .  $q_{l+1/2}^L$  と  $q_{l+1/2}^R$  はセル境界面の左右の  $q$  の値で, この式の右辺第 1 項は境界面の左右の流束の値の平均を取ることの意味する . また第 2 項はこの不連続  $\delta q$  のために境界から発生する波の項である . セル境界面における流束の跳躍量は  $\delta F_i = A_i \delta q = R_i A_i^+ L_i \delta q + R_i A_i^- L_i \delta q$  で,  $R_i A_i^+ L_i \delta q$ ,  $R_i A_i^- L_i \delta q$  はそれぞれ  $x$  の正または負の向きに伝播する波を横切ったの流束の跳躍量である . TVD 安定な解は,  $(H_i)_{l+1/2}$  をこれらすべての波の上流側に取りることによって得られる . この流束の値は境界面左側の流束に負の向きの波を横切ったの流束の跳躍量を加えたもの  $F_i(q_{l+1/2}^L) + R_i A_i^- L_i \delta q$ , または右側の流束から正の向きの波を横切ったの流束の跳躍量を引いたもの  $F_i(q_{l+1/2}^R) - R_i A_i^+ L_i \delta q$  である . 式 (17.132) はこれらの式の平均を取り対称性を持たせたものである .

ここではセル境界の不連続に起因する波を Roe の近似リーマン解で求めることにする . ヤコビ行列  $A$  は次の条件を満足するように決定できれば, スキームは保存形になる .

$$\delta F = \bar{A} \delta q, \quad F_R - F_L = \bar{A}(q_R - q_L) \quad (17.133)$$

ただし  $\bar{A}$  は  $q_L$  と  $q_R$  の関数で,  $q_L = q_R = q$  ならば  $\bar{A}(q, q) = A(q) = \partial F / \partial q$ , また  $\bar{A}$  は実固有値と 1 次独立の固有ベクトルを持つものとする . Roe はこれらの 3 条件を満足する  $\bar{A}$  を巧妙な手段で見出している<sup>42</sup> . 未知変数ベクトル  $q$  と流束ベクトル  $F$  は

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ H \end{pmatrix} \quad (17.134)$$

で定義されるベクトル  $z$  の成分の 2 次式で表すことができる . すなわち

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_1 z_3 \\ z_1 z_4 \\ \frac{z_1 z_5}{\gamma} + \frac{\tilde{\gamma}}{2\gamma} z_k z_k \end{pmatrix}, \quad (17.135a)$$

<sup>42</sup>Roe, P. L., Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, **43**(1981), 357-72.

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u u_i + \delta_{1i} p \\ \rho v u_i + \delta_{2i} p \\ \rho w u_i + \delta_{3i} p \\ \rho H u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_{i+1} \\ z_2 z_{i+1} + \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_3 z_{i+1} + \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_4 z_{i+1} + \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_5 z_{i+1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17.135b)$$

ただし  $z_k z_k = z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$  である.  $q$  と  $F_i$  の中の 2 次式  $z_1^2, z_1 z_2, \dots$  の差分は,  $\delta(ab) = (ab)_R - (ab)_L = \bar{a} b + \bar{b} a$  のように書き換えることができる. ただし  $\delta u = u_R - u_L$ ,  $\bar{u} = (u_L + u_R)/2$  である.  $\delta q, \delta F_i$  に対しこの書換えを実行し整理すれば次式が得られる.

$$\delta q = \bar{B} \delta z, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_3 & 0 & \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_4 & 0 & 0 & \bar{z}_1 & 0 \\ \frac{1}{\gamma} \bar{z}_5 & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_2 & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_3 & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_4 & \frac{1}{\gamma} \bar{z}_1 \end{pmatrix} \quad (17.136a)$$

$$\delta F_i = \bar{C}_i \delta z, \quad \bar{C}_i = \begin{pmatrix} \bar{z}_{i+1} & \delta_{1i} \bar{z}_1 & \delta_{2i} \bar{z}_1 & \delta_{3i} \bar{z}_1 & 0 \\ \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_5 & \delta_{1i} \frac{1}{\gamma} \bar{z}_2 + \bar{z}_{i+1} & \delta_{2i} \bar{z}_2 - \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_3 & \delta_{3i} \bar{z}_2 - \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_4 & \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_1 \\ \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_5 & \delta_{1i} \bar{z}_3 - \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_2 & \delta_{2i} \frac{1}{\gamma} \bar{z}_3 + \bar{z}_{i+1} & \delta_{3i} \bar{z}_3 - \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_4 & \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_1 \\ \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_5 & \delta_{1i} \bar{z}_4 - \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_2 & \delta_{2i} \bar{z}_4 - \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_3 & \delta_{3i} \frac{1}{\gamma} \bar{z}_4 + \bar{z}_{i+1} & \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \bar{z}_1 \\ 0 & \delta_{1i} \bar{z}_5 & \delta_{2i} \bar{z}_5 & \delta_{3i} \bar{z}_5 & \bar{z}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (17.136b)$$

これより  $\delta F_i = \bar{C}_i \delta z = \bar{C}_i \bar{B}^{-1} \delta q$ , 式 (17.133) を満足する  $\bar{A}_i = \bar{C}_i \bar{B}^{-1}$  は次のように求められる.

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \\ -\frac{\bar{z}_2 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} + \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & \delta_{1i} (1 - \tilde{\gamma}) \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1} & \delta_{2i} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} - \delta_{1i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} & \delta_{3i} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} - \delta_{1i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} & \delta_{1i} \tilde{\gamma} \\ -\frac{\bar{z}_3 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} + \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & \delta_{1i} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - \delta_{2i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & \delta_{2i} (1 - \tilde{\gamma}) \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1} & \delta_{3i} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - \delta_{2i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} & \delta_{2i} \tilde{\gamma} \\ -\frac{\bar{z}_4 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} + \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & \delta_{1i} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} - \delta_{3i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & \delta_{2i} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} - \delta_{3i} \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} & \delta_{3i} (1 - \tilde{\gamma}) \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1} & \delta_{3i} \tilde{\gamma} \\ -\frac{\bar{z}_5 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1} & \delta_{1i} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} & \delta_{2i} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_3 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} & \delta_{3i} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_4 \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1^2} & \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 \\ -\bar{u} \bar{u}_i + \delta_{1i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 & \mathbb{D}_{11} & \delta_{2i} \bar{u} - \delta_{1i} \tilde{\gamma} \bar{v} & \delta_{3i} \bar{u} - \delta_{1i} \tilde{\gamma} \bar{w} & \delta_{1i} \tilde{\gamma} \\ -\bar{v} \bar{u}_i + \delta_{2i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 & \delta_{1i} \bar{v} - \delta_{2i} \tilde{\gamma} \bar{u} & \mathbb{D}_{12} & \delta_{3i} \bar{v} - \delta_{2i} \tilde{\gamma} \bar{w} & \delta_{2i} \tilde{\gamma} \\ -\bar{w} \bar{u}_i + \delta_{3i} \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 & \delta_{1i} \bar{w} - \delta_{3i} \tilde{\gamma} \bar{u} & \delta_{2i} \bar{w} - \delta_{3i} \tilde{\gamma} \bar{v} & \mathbb{D}_{13} & \delta_{3i} \tilde{\gamma} \\ -\bar{H} \bar{u}_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 \bar{u}_i & \delta_{1i} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{u} \bar{u}_i & \delta_{2i} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{v} \bar{u}_i & \delta_{3i} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{w} \bar{u}_i & \tilde{\gamma} \bar{u}_i \end{pmatrix} \quad (17.137)$$



ただし  $\bar{\mathbf{u}}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$ ,  $\mathbb{D}_{ij} = \delta_{ji}(1-\tilde{\gamma})\bar{u}_j + \bar{u}_i$ , また  $\bar{u}_i = \bar{z}_{i+1}/\bar{z}_1$ ,  $\bar{H} = \bar{z}_5/\bar{z}_1$  は次のように定義される  $u_i$  または  $H$  の平均値である .

$$\bar{u}_i = \frac{\sqrt{\rho_L} u_{iL} + \sqrt{\rho_R} u_{iR}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

この行列  $\bar{A}_i$  は, Roe の第 1 条件 (17.133) を満足するように導かれたものであり, また  $\bar{u}_i, \bar{H}$  の定義式により第 2 条件  $q_L = q_R = q$  のとき  $\bar{A}_i(q, q) = A_i(q)$  も満足されることになる . また  $\bar{A}_i$  は保存形方程式のヤコビ行列  $A_i$  の式 (17.69b) と同形で, 5 個の実固有値と 5 個の 1 次独立の固有ベクトルを持つもので第 3 条件も満足されることになる .

保存形の  $\bar{A}_i$  を非保存形のものにする行列  $\bar{N}$  とその逆行列  $\bar{N}^{-1}$  は式 (17.72) に倣えば次のようになる .

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{v}/\bar{\rho} & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ -\bar{w}/\bar{\rho} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 \\ \tilde{\gamma}\bar{\mathbf{u}}^2/2 & -\tilde{\gamma}\bar{u} & -\tilde{\gamma}\bar{v} & -\tilde{\gamma}\bar{w} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v} & 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^2/2 & \bar{\rho}\bar{u} & \bar{\rho}\bar{v} & \bar{\rho}\bar{w} & 1/\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \quad (17.138)$$

またこの  $\bar{N}$  が実際の計算に便利に利用されるには

$$\bar{N}\delta q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{v}/\bar{\rho} & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ -\bar{w}/\bar{\rho} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 \\ \tilde{\gamma}\bar{\mathbf{u}}^2/2 & -\tilde{\gamma}\bar{u} & -\tilde{\gamma}\bar{v} & -\tilde{\gamma}\bar{w} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta(\rho u) \\ \delta(\rho v) \\ \delta(\rho w) \\ \delta e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta p \end{pmatrix} = \delta q^* \quad (17.139)$$

でなければならない . すなわち次の 2 つの式が満足されなければならない .

$$\delta u_i = \frac{1}{\bar{\rho}}(-\bar{u}_i\delta\rho + \delta(\rho u_i)), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\delta p = \tilde{\gamma}\delta e - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\delta(\rho\mathbf{u}^2) = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\bar{\mathbf{u}}^2\delta\rho - \tilde{\gamma}\bar{u}_k\delta(\rho u_k) + \tilde{\gamma}\delta e$$

ところでこれらの式の中の  $\delta(\rho u_i)$  と  $\delta(\rho\mathbf{u}^2)$  は次のように書き換えることができる<sup>43</sup> .

$$\begin{aligned} \delta(\rho u_i) &= (\rho u_i)_R - (\rho u_i)_L = \{(\sqrt{\rho}u_i)_R + (\sqrt{\rho}u_i)_L\}(\sqrt{\rho_R} - \sqrt{\rho_L}) + \sqrt{\rho_L\rho_R}((u_i)_R - (u_i)_L) \\ &= \bar{u}_i\delta\rho + \sqrt{\rho_L\rho_R}\delta u_i \\ \delta(\rho\mathbf{u}^2) &= (\rho\mathbf{u}^2)_R - (\rho\mathbf{u}^2)_L = \{(\sqrt{\rho}u_k)_R + (\sqrt{\rho}u_k)_L\}\{(\sqrt{\rho}u_k)_R - (\sqrt{\rho}u_k)_L\} \\ &= \bar{u}_k(\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L})\{(\sqrt{\rho}u_k)_R - (\sqrt{\rho}u_k)_L\} \\ &= \bar{u}_k\delta(\rho u_k) + \sqrt{\rho_R\rho_L}\bar{u}_k\delta u_k \end{aligned}$$

したがって上記の 2 つの式の上式は  $\delta(\rho u) = \bar{u}\delta\rho + \bar{\rho}\delta u$  すなわち密度の平均値  $\bar{\rho}$  を

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L\rho_R}$$

<sup>43</sup> ニュートンの総和則を用いる .

のように定義すれば成立する．また下式もこの  $\bar{\rho}$  の定義のもとで成立する．

非保存形の係数行列  $\bar{A}_i^* = \bar{N}\bar{A}_i\bar{N}^{-1}$  は次のようになる．

$$\bar{A}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{u}_i & \delta_{1i}\bar{\rho} & \delta_{2i}\bar{\rho} & \delta_{3i}\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u}_i & 0 & 0 & \delta_{1i}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u}_i & 0 & \delta_{2i}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_i & \delta_{3i}/\bar{\rho} \\ 0 & \delta_{1i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \delta_{2i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \delta_{3i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \bar{u}_i \end{pmatrix} \quad (17.140)$$

ただし  $\bar{c}$  は次式で定義される平均音速である．

$$\bar{c}^2 = \gamma\left(\bar{H} - \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^2\right)$$

この  $\bar{A}_i^*$  も形式的に式 (17.70b) の  $A_i^*$  と同形で，その固有値  $\bar{\lambda}_i$  は  $|\bar{A}_i^* - \bar{\lambda}_i I| = 0$  すなわち

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_i - \bar{\lambda}_i & \delta_{1i}\bar{\rho} & \delta_{2i}\bar{\rho} & \delta_{3i}\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{u}_i - \bar{\lambda}_i & 0 & 0 & \delta_{1i}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u}_i - \bar{\lambda}_i & 0 & \delta_{2i}/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{u}_i - \bar{\lambda}_i & \delta_{3i}/\bar{\rho} \\ 0 & \delta_{1i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \delta_{2i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \delta_{3i}\bar{\rho}\bar{c}^2 & \bar{u}_i - \bar{\lambda}_i \end{vmatrix} = (\bar{u}_i - \bar{\lambda}_i)^3 \{(\bar{u}_i - \bar{\lambda}_i)^2 - (\delta_{1i} + \delta_{2i} + \delta_{3i})\bar{c}^2\} = 0$$

から計算することができ次のように求められる．

$$\bar{\Lambda}_i = \begin{pmatrix} \bar{u}_i & & & & 0 \\ & \bar{u}_i + \delta_{1i}\bar{c} & & & \\ & & \bar{u}_i + \delta_{2i}\bar{c} & & \\ & & & \bar{u}_i + \delta_{3i}\bar{c} & \\ 0 & & & & \bar{u}_i - \bar{c} \end{pmatrix} \quad (17.141)$$

また  $\bar{A}_i^*$  の左固有ベクトル  $\bar{l}_{ik}^*$ , ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) は  $\bar{l}_{ik}^* (\bar{A}_i^* - \bar{\lambda}_i I) = 0$  から求められる．その行列を  $\bar{L}_i^*$ ，その逆行列を  $\bar{R}_i^*$  とすれば，これらの固有ベクトルの行列は次のように式 (17.74b) または (17.74c) と形式的に同じものになる．

$$\bar{L}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/\bar{c}^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta_{1i}/\bar{\rho}\bar{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \delta_{2i}/\bar{\rho}\bar{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_{3i}/\bar{\rho}\bar{c} \\ 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & -1/\bar{\rho}\bar{c} \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & \delta_{1i}\bar{\rho}/2\bar{c} & \delta_{2i}\bar{\rho}/2\bar{c} & \delta_{3i}\bar{\rho}/2\bar{c} & -\bar{\rho}/2\bar{c} \\ 0 & 1 - \delta_{1i}/2 & 0 & 0 & \delta_{1i}/2 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_{2i}/2 & 0 & \delta_{2i}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \delta_{3i}/2 & \delta_{3i}/2 \\ 0 & \delta_{1i}\bar{\rho}\bar{c}/2 & \delta_{2i}\bar{\rho}\bar{c}/2 & \delta_{3i}\bar{\rho}\bar{c}/2 & -\bar{\rho}\bar{c}/2 \end{pmatrix} \quad (17.142)$$

$\bar{A}_i$  の固有値は  $\bar{A}_i^*$  のものと同じになり， $\bar{A}_i$  の固有ベクトルの行列は  $\bar{L}_i = \bar{L}_i^* \bar{N}$ ， $\bar{R}_i = \bar{N}^{-1} \bar{R}_i^*$  となる．これより  $\bar{A}_i$  は確かに 5 個の実固有値 (重根を含む) と 5 個の 1 次独立の実固有ベクトルを持つことが分かる．

実際の計算に必要な特性速度，特性変数の差分，右固有ベクトルすなわち  $\bar{\Lambda}_i$ ， $\partial \bar{W}_i = \bar{L}_i^* \delta q^*$ ， $\bar{R}_i$  の成分

はまとめて書けば次のようになる .

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{i1} &= \bar{u}_i, \quad \bar{\lambda}_{i,k+1} = \bar{u}_i + \delta_{ki} \bar{c}, & (k = 1, 2, 3) \\ \bar{\lambda}_{i5} &= \bar{u}_i - \bar{c} \end{aligned} \quad (17.143a)$$

$$\begin{aligned} \partial \bar{w}_i^1 &= \delta \rho - \delta p / \bar{c}^2, \quad \partial \bar{w}_i^{k+1} = \delta u_k + \delta_{ki} \delta p / \bar{\rho} \bar{c}, & (k = 1, 2, 3) \\ \partial \bar{w}_i^5 &= \delta u_i - \delta p / \bar{\rho} \bar{c}, \end{aligned} \quad (17.143b)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_i^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}^2/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_i^{k+1} = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} \delta_{ki} \\ \delta_{ki} \bar{u}_1 + \delta_{k1} (2 - \delta_{1i}) \bar{c} \\ \delta_{ki} \bar{u}_2 + \delta_{k2} (2 - \delta_{2i}) \bar{c} \\ \delta_{ki} \bar{u}_3 + \delta_{k3} (2 - \delta_{3i}) \bar{c} \\ \delta_{ki} \bar{H} + (2 - \delta_{ki}) \bar{c} \bar{u}_k \end{pmatrix}, & (k = 1, 2, 3) \\ \bar{r}_i^5 &= -\frac{\bar{\rho}}{2\bar{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_1 - \delta_{1i} \bar{c} \\ \bar{u}_2 - \delta_{2i} \bar{c} \\ \bar{u}_3 - \delta_{3i} \bar{c} \\ \bar{H} - \bar{c} \bar{u}_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17.143c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} = \mathfrak{R} \rho_L, \quad \bar{u}_i = \frac{u_{iL} + \mathfrak{R} u_{iR}}{1 + \mathfrak{R}}, \quad \bar{H} = \frac{H_L + \mathfrak{R} H_R}{1 + \mathfrak{R}}, \\ \bar{c}^2 &= \tilde{\gamma} \left( \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{u}^2 \right), \quad \mathfrak{R} \equiv \sqrt{\rho_R / \rho_L} \end{aligned} \quad (17.143d)$$

以上述べた Roe の近似 Riemann 解を用いれば, セル境界における数値流束は次のようになる .

$$(H_i)_{l+1/2} = \frac{1}{2} \{ F_i(q_{l+1/2}^L) + F_i(q_{l+1/2}^R) \} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 (|\bar{\lambda}_{ik}| \partial \bar{w}_i^k \bar{r}_i^k)_{l+1/2} \quad (17.144)$$

$\bar{\lambda}_{ik} \partial \bar{w}_i^k \bar{r}_i^k$  はセル境界面から発生する  $k$  番目の波を横切ったの流束の跳躍量である . この近似リーマン解は, 物理変数に代わるものとしていわゆる Roe 平均  $\bar{\rho}, \bar{u}_i, \bar{H}, \dots$  を導入しリーマン問題を特性の理論によって陽的に解くもので, リーマン問題を厳密に解くときに現れる膨張扇と衝撃波は圧力波として求められることになる . Roe の近似リーマン解において  $\bar{A}_i \delta q$  は保存性を持つ量で, したがってこのスキームは保存性を有する . またこのスキームは不連続をかなりの精度で捕獲する能力を秘めている . セル境界面における  $q$  の成分  $\rho_{l+1/2}^S, (\rho u_i)_{l+1/2}^S, e_{l+1/2}^S$  ( $S = L, R$ ) の値は前項の式 (17.123) から求められ, セル境界面における流束  $F_i(q_{l+1/2}^S)$  ( $S = L, R$ ) はこれらの値を用い次式から求められる .

$$F_i(q) = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ (\rho u_1)(\rho u_i)/\rho + \delta_{1i} p \\ (\rho u_2)(\rho u_i)/\rho + \delta_{2i} p \\ (\rho u_3)(\rho u_i)/\rho + \delta_{3i} p \\ (e+p)(\rho u_i)/\rho \end{pmatrix} \quad (17.145)$$

ただし  $p = \tilde{\gamma} \{ e - (\rho u_k)(\rho u_k)/2\rho \}$  である .

## 17.6.3 発展段階—曲線座標格子における Roe の近似リーマン解

曲線座標格子に対しても 同様にセル境界面における数値流束  $\hat{H}$  を求めることができる .

$$(\hat{H}_i)_{l+1/2} = \frac{1}{2} \{ \mathfrak{F}_i(q_{l+1/2}^L) + \mathfrak{F}_i(q_{l+1/2}^R) \} - \frac{1}{2} | \mathfrak{A}_i(q_{l+1/2}^L, q_{l+1/2}^R) | \delta q \quad (17.146)$$

$q(\xi)$  は  $\xi$  の区分的多項式 ,  $q_{l+1/2}^L, q_{l+1/2}^R$  はセル境界面の左右の  $q$  の値 , また最後の項はセル境界面における不連続による波の項でここでは Roe の近似リーマン解によって求められる .

Roe の近似リーマン解では , まずヤコビ行列  $\mathfrak{A}$  が次の 3 条件を満足する  $\bar{\mathfrak{A}}$  で近似される . すなわち  $q_L$  と  $q_R$  の関数  $\bar{\mathfrak{A}}$  は (i) 保存の条件

$$\delta \mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{A}} \delta q, \quad \mathfrak{F}_R - \mathfrak{F}_L = \bar{\mathfrak{A}}(q_R - q_L) \quad (17.147)$$

を満足し , (ii)  $q_L = q_R = q$  ならば  $\bar{\mathfrak{A}}(q, q) = \mathfrak{A}(q) = \partial \mathfrak{F} / \partial q$  , (iii) また特性の理論を適用すべく実固有値と 1 次独立の固有ベクトルを持つように決定される . その導出過程は上記と同様である . 未知変数ベクトル  $q$  と流束ベクトル  $\mathfrak{F}$  も式 (17.134) のベクトル  $z$  の成分の 2 次式で表すことができる . すなわち

$$q = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ z_1 z_3 \\ z_1 z_4 \\ \frac{1}{\gamma} z_1 z_5 + \frac{\tilde{\gamma}}{2\gamma} z_k z_k \end{pmatrix}, \quad (17.148a)$$

$$\mathfrak{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho v U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho w U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 Z_i \\ z_2 Z_i + \xi_{i,1} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_3 Z_i + \xi_{i,2} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_4 Z_i + \xi_{i,3} \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} (z_1 z_5 - \frac{1}{2} z_k z_k) \\ z_5 Z_i \end{pmatrix} \quad (17.148b)$$

ただし  $Z_i = \xi_{i,1} z_2 + \xi_{i,2} z_3 + \xi_{i,3} z_4$  ,  $z_k z_k = z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$  である .  $q$  と  $\mathfrak{F}_i$  の中の 2 次式  $z_1^2, z_1 z_2, \dots$  の差分は ,  $\delta(ab) = (ab)_R - (ab)_L = \bar{a} \delta b + \bar{b} \delta a$  のように書き換えることができる . ただし  $\delta u = u_R - u_L$  ,  $\bar{u} = (u_L + u_R) / 2$  である .  $\delta q, \delta \mathfrak{F}_i$  に対しこの書換えを実行し整理すれば次式が得られる .

$$\delta q = \bar{B} J \delta z, \quad (17.149a)$$

$$\delta \mathfrak{F}_i = \bar{C}_i J \delta z,$$

$$\bar{C}_i = \begin{pmatrix} \bar{Z}_i & \xi_{i,1} \bar{z}_1 & \xi_{i,2} \bar{z}_1 & \xi_{i,3} \bar{z}_1 & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,1} \bar{z}_5 & \frac{1}{\gamma} \xi_{i,1} \bar{z}_2 + \bar{Z}_i & \xi_{i,2} \bar{z}_2 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,1} \bar{z}_3 & \xi_{i,3} \bar{z}_2 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,1} \bar{z}_4 & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,1} \bar{z}_1 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,2} \bar{z}_5 & \xi_{i,1} \bar{z}_3 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,2} \bar{z}_2 & \frac{1}{\gamma} \xi_{i,2} \bar{z}_3 + \bar{Z}_i & \xi_{i,3} \bar{z}_3 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,2} \bar{z}_4 & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,2} \bar{z}_1 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,3} \bar{z}_5 & \xi_{i,1} \bar{z}_4 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,3} \bar{z}_2 & \xi_{i,2} \bar{z}_4 - \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,3} \bar{z}_3 & \frac{1}{\gamma} \xi_{i,3} \bar{z}_4 + \bar{Z}_i & \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \xi_{i,3} \bar{z}_1 \\ 0 & \xi_{i,1} \bar{z}_5 & \xi_{i,2} \bar{z}_5 & \xi_{i,3} \bar{z}_5 & \bar{Z}_i \end{pmatrix} \quad (17.149b)$$

ただし  $\bar{B}$  は式 (17.136a) で定義された行列である．これより  $\delta \mathfrak{F}_i = \bar{c}_i J \delta z = \bar{c}_i \bar{B}^{-1} \delta q$ ，式 (17.147) を満足する  $\bar{\mathfrak{A}}_i = \bar{c}_i \bar{B}^{-1}$  は次のように求められる．

$$\bar{\mathfrak{A}}_i = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 \\ -\frac{\bar{z}_2 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & (1-\tilde{\gamma}) \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{Z}_i}{\bar{z}_1} & \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} & \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} & \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \\ -\frac{\bar{z}_3 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & (1-\tilde{\gamma}) \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{Z}_i}{\bar{z}_1} & \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} & \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \\ -\frac{\bar{z}_4 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k}{\bar{z}_1^2} & \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} & \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1} & (1-\tilde{\gamma}) \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1} + \frac{\bar{Z}_i}{\bar{z}_1} & \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \\ -\frac{\bar{z}_5 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \frac{\bar{z}_k \bar{z}_k \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} & \xi_{i,1} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_2 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} & \xi_{i,2} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_3 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} & \xi_{i,3} \frac{\bar{z}_5}{\bar{z}_1} - \tilde{\gamma} \frac{\bar{z}_4 \bar{Z}_i}{\bar{z}_1^2} & \gamma \frac{\bar{Z}_i}{\bar{z}_1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 \\ -\bar{u} \bar{U}_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,1} \bar{u}^2 & \hat{\mathbb{D}}_{i1} & \xi_{i,2} \bar{u} - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \bar{v} & \xi_{i,3} \bar{u} - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \bar{w} & \tilde{\gamma} \xi_{i,1} \\ -\bar{v} \bar{U}_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,2} \bar{u}^2 & \xi_{i,1} \bar{v} - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \bar{u} & \hat{\mathbb{D}}_{i2} & \xi_{i,3} \bar{v} - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \bar{w} & \tilde{\gamma} \xi_{i,2} \\ -\bar{w} \bar{U}_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \xi_{i,3} \bar{u}^2 & \xi_{i,1} \bar{w} - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \bar{u} & \xi_{i,2} \bar{w} - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \bar{v} & \hat{\mathbb{D}}_{i3} & \tilde{\gamma} \xi_{i,3} \\ -\bar{H} \bar{U}_i + \frac{\tilde{\gamma}}{2} \bar{u}^2 \bar{U}_i & \xi_{i,1} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{u} \bar{U}_i & \xi_{i,2} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{v} \bar{U}_i & \xi_{i,3} \bar{H} - \tilde{\gamma} \bar{w} \bar{U}_i & \gamma \bar{U}_i \end{pmatrix} \quad (17.150)$$

ただし  $\bar{u}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$ ， $\hat{\mathbb{D}}_{ij} = (1-\tilde{\gamma}) \xi_{i,j} \bar{u}_j + \bar{U}_i$ ，また  $\bar{u}_i = \bar{z}_{i+1}/\bar{z}_1$ ， $\bar{U}_i = \bar{Z}_i/\bar{z}_1$ ， $\bar{H} = \bar{z}_5/\bar{z}_1$  は次のように定義される  $u_i$ ， $U_i$ ， $H$  の平均値である．

$$\bar{u}_i = \frac{\sqrt{\rho_L} u_{iL} + \sqrt{\rho_R} u_{iR}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \bar{U}_i = \frac{\sqrt{\rho_L} U_{iL} + \sqrt{\rho_R} U_{iR}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

この行列  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  は，Roe の第 1 条件 (17.147) を満足するように導かれたもので，その第 2 条件も  $\bar{u}_i$ ， $\bar{U}_i$ ， $\bar{H}$  の定義式によって満足されることになる．また  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  は保存形方程式のヤコビ行列  $\mathfrak{A}_i$  の式 (17.79b) と同形で 5 個の実固有値と 5 個の 1 次独立の固有ベクトルを持つもので第 3 条件も満足されることになる．

保存形の  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  を非保存形のものにする行列は式 (17.138) の  $\bar{N}$  である．またこの  $\bar{N}$  が実際の計算に便利に利用されるためには

$$\bar{N} \delta q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{u}/\bar{\rho} & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{v}/\bar{\rho} & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 & 0 \\ -\bar{w}/\bar{\rho} & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} & 0 \\ \tilde{\gamma} \bar{u}^2/2 & -\tilde{\gamma} \bar{u} & -\tilde{\gamma} \bar{v} & -\tilde{\gamma} \bar{w} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta(\rho u) \\ \delta(\rho v) \\ \delta(\rho w) \\ \delta e \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta w \\ \delta p \end{pmatrix} = J \delta q^* \quad (17.151)$$

なる関係が成立しなければならない．この式は直角座標の場合の式 (17.139) と等価なもので，密度の平均値  $\bar{\rho}$  を

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

のように定義すれば成立することになる．

非保存形の係数行列  $\bar{\alpha}_i^* = \bar{N} \bar{\alpha}_i \bar{N}^{-1}$  は次のようになる .

$$\bar{\alpha}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{U}_i & \xi_{i,1} \bar{\rho} & \xi_{i,2} \bar{\rho} & \xi_{i,3} \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{U}_i & 0 & 0 & \xi_{i,1} / \bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{U}_i & 0 & \xi_{i,2} / \bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U}_i & \xi_{i,3} / \bar{\rho} \\ 0 & \xi_{i,1} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \xi_{i,2} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \xi_{i,3} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \bar{U}_i \end{pmatrix} \quad (17.152)$$

ただし  $\bar{c}$  は次式で定義される平均音速である .

$$\bar{c}^2 = \tilde{\gamma} \left( \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^2 \right)$$

この  $\bar{\alpha}_i^*$  も形式的に式 (17.80b) の  $\alpha_i^*$  と同形で , その固有値  $\bar{\xi}_i$  は  $|\bar{\alpha}_i^* - \bar{\xi}_i I| = 0$  すなわち

$$\begin{vmatrix} \bar{U}_i - \bar{\xi}_i & \xi_{i,1} \bar{\rho} & \xi_{i,2} \bar{\rho} & \xi_{i,3} \bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{U}_i - \bar{\xi}_i & 0 & 0 & \xi_{i,1} / \bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{U}_i - \bar{\xi}_i & 0 & \xi_{i,2} / \bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{U}_i - \bar{\xi}_i & \xi_{i,3} / \bar{\rho} \\ 0 & \xi_{i,1} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \xi_{i,2} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \xi_{i,3} \bar{\rho} \bar{c}^2 & \bar{U}_i - \bar{\xi}_i \end{vmatrix} = (\bar{U}_i - \bar{\xi}_i)^3 \{ (\bar{U}_i - \bar{\xi}_i)^2 - g^{ii} \bar{c}^2 \} = 0$$

から計算することができ次のように求められる .

$$\bar{\mathfrak{A}}_i = \begin{pmatrix} \bar{U}_i & & & & 0 \\ & \bar{U}_i + \delta_{1i} \sqrt{g^{11}} \bar{c} & & & \\ & & \bar{U}_i + \delta_{2i} \sqrt{g^{22}} \bar{c} & & \\ & & & \bar{U}_i + \delta_{3i} \sqrt{g^{33}} \bar{c} & \\ 0 & & & & \bar{U}_i - \sqrt{g^{ii}} \bar{c} \end{pmatrix} \quad (17.153)$$

また  $\bar{\alpha}_i^*$  の左固有ベクトル  $\bar{l}_{ik}^*$  , ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ) は  $\bar{l}_{ik}^* (\bar{\alpha}_i^* - \bar{\xi}_i I) = 0$  から求められる . その行列を  $\bar{\mathfrak{L}}_i^*$  , その逆行列を  $\bar{\mathfrak{A}}_i^*$  とすれば , これらの固有ベクトルの行列は次のように式 (17.82b) または (17.82c) と形式的に同じものになる .

$$\bar{\mathfrak{L}}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/\bar{c}^2 \\ 0 & \xi_{i,i} & \delta_{1i} \xi_{1,2} - \delta_{2i} \xi_{2,1} & \delta_{1i} \xi_{1,3} - \delta_{3i} \xi_{3,1} & \delta_{1i} \sqrt{g^{11}} / \bar{\rho} \bar{c} \\ 0 & \delta_{2i} \xi_{2,1} - \delta_{1i} \xi_{1,2} & \xi_{i,i} & \delta_{2i} \xi_{2,3} - \delta_{3i} \xi_{3,2} & \delta_{2i} \sqrt{g^{22}} / \bar{\rho} \bar{c} \\ 0 & \delta_{3i} \xi_{3,1} - \delta_{1i} \xi_{1,3} & \delta_{3i} \xi_{3,2} - \delta_{2i} \xi_{2,3} & \xi_{i,i} & \delta_{3i} \sqrt{g^{33}} / \bar{\rho} \bar{c} \\ 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & -\sqrt{g^{ii}} / \bar{\rho} \bar{c} \end{pmatrix}, \quad (17.154a)$$

$$\bar{\mathfrak{R}}_i^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_{1i}\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{11}\bar{c}}} & \frac{\delta_{2i}\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{22}\bar{c}}} & \frac{\delta_{3i}\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{33}\bar{c}}} & -\frac{\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{ii}\bar{c}}} \\ 0 & \mathbb{D}_{i1} & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i}-1\right)\frac{\xi_{i,1}\xi_{i,2}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i}-1\right)\frac{\xi_{i,1}\xi_{i,3}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,1}}{2g^{ii}} \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i}-1\right)\frac{\xi_{i,2}\xi_{i,1}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \mathbb{D}_{i2} & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i}-1\right)\frac{\xi_{i,2}\xi_{i,3}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,2}}{2g^{ii}} \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i}-1\right)\frac{\xi_{i,3}\xi_{i,1}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i}-1\right)\frac{\xi_{i,3}\xi_{i,2}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \mathbb{D}_{i3} & \frac{\xi_{i,3}}{2g^{ii}} \\ 0 & \frac{\delta_{1i}\bar{\rho}\bar{c}}{2\sqrt{g^{11}}} & \frac{\delta_{2i}\bar{\rho}\bar{c}}{2\sqrt{g^{22}}} & \frac{\delta_{3i}\bar{\rho}\bar{c}}{2\sqrt{g^{33}}} & -\frac{\bar{\rho}\bar{c}}{2\sqrt{g^{ii}}} \end{pmatrix} \quad (17.154b)$$

$$\mathbb{D}_{ij} = \left(\frac{3}{2}\delta_{ji}-1\right)\frac{\xi_{i,j}^2}{g^{ii}\xi_{i,i}} + (1-\delta_{ji})\frac{1}{\xi_{i,i}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

$\bar{\mathfrak{A}}_i$  の固有値は  $\bar{\mathfrak{A}}_i^*$  のものと同じになり,  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  の固有ベクトルの行列は  $\bar{\mathfrak{L}}_i = \bar{\mathfrak{L}}_i^* \bar{N}$ ,  $\bar{\mathfrak{R}}_i = \bar{N}^{-1} \bar{\mathfrak{R}}_i^*$  となる. これより  $\bar{\mathfrak{A}}_i$  も確かに 5 個の実固有値 (重根を含む) と 5 個の 1 次独立の実固有ベクトルを持つことが分かる.

実際の計算に必要な特性速度, 特性変数の差分, 右固有ベクトルすなわち  $\bar{\mathfrak{R}}_i$ ,  $\partial \bar{\mathfrak{W}}_i = \bar{\mathfrak{L}}_i^* \delta q^*$ ,  $\bar{\mathfrak{R}}_i$  の成分はまとめて書けば次のようになる.

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{k}}_{i1} &= \bar{U}_i, & \bar{\mathfrak{k}}_{ik+1} &= \bar{U}_i + \delta_{ik} \sqrt{g^{ii}\bar{c}}, & (k = 1, 2, 3) \\ \bar{\mathfrak{k}}_{i5} &= \bar{U}_i - \sqrt{g^{ii}\bar{c}} \end{aligned} \quad (17.155a)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{w}_i^1 &= \delta \rho - \delta p / \bar{c}^2, & \delta \mathfrak{w}_i^{k+1} &= \delta_{ki} \delta U_i + \xi_{i,i} \delta u_k - \xi_{i,k} \delta u_i + \delta_{ki} \sqrt{g^{ii}} \delta p / \bar{\rho} \bar{c}, \\ \delta \mathfrak{w}_i^5 &= \delta U_i - \sqrt{g^{ii}} \delta p / \bar{\rho} \bar{c} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (17.155b)$$

$$\bar{\mathfrak{v}}_i^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{\mathfrak{u}}^2/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathfrak{v}}_i^{k+1} = \frac{\delta_{ki}\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{ii}\bar{c}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{H} \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}\delta_{ki}-1\right) \frac{\xi_{i,k}\bar{\rho}}{g^{ii}\xi_{i,i}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{i,1} \\ \xi_{i,2} \\ \xi_{i,3} \\ \bar{U}_i \end{pmatrix} + \frac{(1-\delta_{ki})\bar{\rho}}{\xi_{i,i}} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \\ \bar{u}_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathfrak{v}}_i^5 = -\frac{\bar{\rho}}{2\sqrt{g^{ii}\bar{c}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{H} \end{pmatrix} + \frac{\bar{\rho}}{2g^{ii}} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{i,1} \\ \xi_{i,2} \\ \xi_{i,3} \\ \bar{U}_i \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (17.155c)$$

ただし  $\delta U_i = \xi_{i,k} \delta u_k$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} = \mathfrak{R} \rho_L, & \bar{u}_i &= \frac{u_{iL} + \mathfrak{R} u_{iR}}{1 + \mathfrak{R}}, & \bar{U}_i &= \frac{U_{iL} + \mathfrak{R} U_{iR}}{1 + \mathfrak{R}}, & \bar{H} &= \frac{H_L + \mathfrak{R} H_R}{1 + \mathfrak{R}}, \\ \bar{c}^2 &= \tilde{\gamma} \left( \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{u}}^2 \right), & \mathfrak{R} &\equiv \sqrt{\rho_R / \rho_L} \end{aligned} \quad (17.155d)$$

以上述べた Roe の近似 Riemann 解を用いれば，セル境界における数値流束は次のようになる．

$$(\hat{H}_i)_{l+1/2} = \frac{1}{2} \{ \mathfrak{F}_i(q_{l+1/2}^L) + \mathfrak{F}_i(q_{l+1/2}^R) \} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 (|\bar{\mathfrak{k}}_{ik} | \partial \bar{\mathfrak{w}}_i^k \bar{\mathfrak{v}}_i^k)_{l+1/2} \quad (17.156)$$

この Roe の近似リーマン解に関しても前項と同様のことが言える．セル境界面における  $q$  の成分の  $(J\rho)_{l+1/2}^S$ ,  $(J\rho u_i)_{l+1/2}^S$ ,  $(Je)_{l+1/2}^S$  ( $S = L, R$ ) の値は式 (17.129) から求められ，セル境界面における流束  $\mathfrak{F}_i(q_{l+1/2}^S)$  ( $S = L, R$ ) はこれらの値を用い次式から求められる．

$$\mathfrak{F}_i(q) = \begin{pmatrix} J\rho u_i \\ (J\rho u_1)(J\rho U_i)/J\rho + \xi_{i,1} J\rho \\ (J\rho u_2)(J\rho U_i)/J\rho + \xi_{i,2} J\rho \\ (J\rho u_3)(J\rho U_i)/J\rho + \xi_{i,3} J\rho \\ (Je + J\rho)(J\rho U_i)/J\rho \end{pmatrix} \quad (17.157)$$

ただし  $J\rho U_i = \xi_{i,k} J\rho u_k$ ,  $J\rho = \tilde{\gamma} \{ Je - (J\rho u_k)(J\rho u_k)/2J\rho \}$  である．

この項の終わりにひとこと加えれば，曲線座標格子のセル境界面における流束分離法で上流化された数値流束は，セル境界面の左右の物理空間における諸量に対し前項の Roe の近似リーマン解を適用し求めることもできようが，本項では保存性をより厳密に追求すべく写像空間における諸量に対し Roe の近似リーマン解を導出したのである．

#### 17.6.4 発展段階—時間積分

時間積分は 16.5 節に述べた 1 次元流れの陽的 2 段階法，Crank-Nicholson 型時間積分法，Roe の波動分離法を多次元に拡張して行うこともできる．ここには陽的 Runge-Kutta 法と  $\Delta$  型陰解法について述べる．3 次 Runge-Kutta 法の式は長方形格子の場合には次のようになる．

$$\begin{aligned} q_{ijk}^{n+1} &= q_{ijk}^n + \frac{1}{6} (k_{ijk}^1 + 4k_{ijk}^2 + k_{ijk}^3) - \Delta t (D_{ijk}^n + g_{ijk}^n) \\ k_{ijk}^1 &= -\Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta x} (H_1(q_{i+1/2,j,k}^n) - H_1(q_{i-1/2,j,k}^n)) + \frac{1}{\Delta y} (H_2(q_{i,j+1/2,k}^n) - H_2(q_{i,j-1/2,k}^n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta z} (H_3(q_{i,j,k+1/2}^n) - H_3(q_{i,j,k-1/2}^n)) \right\} \end{aligned}$$

また  $k_{ijk}^2, k_{ijk}^3$  は  $k_{ijk}^1$  の式中の  $q^n$  をそれぞれ  $q^n + k^*/2$  または  $q^n + k^2/2$  で置換えたもの， $k_{ijk}^*$  は  $q^n + k^1/4$  で置換えたものである．

4 次 Runge-Kutta 法の式は曲線座標格子の場合には次のようになる．

$$\begin{aligned} q_{ijk}^{n+1} &= q_{ijk}^n + \frac{1}{6} (\hat{k}_{ijk}^1 + 2\hat{k}_{ijk}^2 + 2\hat{k}_{ijk}^3 + \hat{k}_{ijk}^4) - \Delta t (\hat{D}_{ijk}^n + \hat{g}_{ijk}^n) \\ \hat{k}_{ijk}^1 &= -\Delta t \left\{ \hat{H}_1(q_{i+1/2,j,k}^n) - \hat{H}_1(q_{i-1/2,j,k}^n) + \hat{H}_2(q_{i,j+1/2,k}^n) - \hat{H}_2(q_{i,j-1/2,k}^n) \right. \\ &\quad \left. + \hat{H}_3(q_{i,j,k+1/2}^n) - \hat{H}_3(q_{i,j,k-1/2}^n) \right\} \end{aligned}$$

また  $\hat{k}_{ijk}^2, \hat{k}_{ijk}^3, \hat{k}_{ijk}^4$  は  $\hat{k}_{ijk}^1$  の式中の  $q^n$  をそれぞれ  $q^n + \hat{k}^1/2$ ,  $q^n + \hat{k}^*/2$  または  $q^n + \hat{k}^*$  で置換えたもの， $\hat{k}_{ijk}^*$  は  $q^n + (\hat{k}^1 + \hat{k}^2)/4$  で置換えたものである．



あるいは

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{ijk}^{n+1} &= \tilde{q}_{ijk}^n + \frac{1}{6}B_{ijk}(\hat{k}_{ijk}^1 + 2\hat{k}_{ijk}^2 + 2\hat{k}_{ijk}^3 + \hat{k}_{ijk}^4) - \Delta t B_{ijk}(\hat{D}_{ijk}^n + \hat{g}_{ijk}^n) \\ &\quad + \Delta t \{ (B_\xi \mathfrak{F}_1)_{ijk} + (B_\eta \mathfrak{F}_2)_{ijk} + (B_\zeta \mathfrak{F}_3)_{ijk} \} \\ (B\hat{k}^1)_{ijk} &= -\Delta t \left\{ B_{i+1/2,j,k} \hat{H}_1(\mathbf{q}_{i+1/2,j,k}^n) - B_{i-1/2,j,k} \hat{H}_1(\mathbf{q}_{i-1/2,j,k}^n) \right. \\ &\quad + B_{i,j+1/2,k} \hat{H}_2(\mathbf{q}_{i,j+1/2,k}^n) - B_{i,j-1/2,k} \hat{H}_2(\mathbf{q}_{i,j-1/2,k}^n) \\ &\quad \left. + B_{i,j,k+1/2} \hat{H}_3(\mathbf{q}_{i,j,k+1/2}^n) - B_{i,j,k-1/2} \hat{H}_3(\mathbf{q}_{i,j,k-1/2}^n) \right\}\end{aligned}$$

次に  $\Delta$  型陰解法の式は定常流れを長方形格子を用いて計算する場合には次のようになる .

$$\begin{aligned}\Delta q_{ijk}^n + \Delta t \theta \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left( (A_1^+)_{ijk}^n \Delta q_{i-1,j,k}^n + |A_1|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^n + (A_1^-)_{ijk}^n \Delta q_{i+1,j,k}^n \right) \right. \\ + \frac{1}{\Delta y} \left( (A_2^+)_{ijk}^n \Delta q_{i,j-1,k}^n + |A_2|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^n + (A_2^-)_{ijk}^n \Delta q_{i,j+1,k}^n \right) \\ \left. + \frac{1}{\Delta z} \left( (A_3^+)_{ijk}^n \Delta q_{i,j,k-1}^n + |A_3|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^n + (A_3^-)_{ijk}^n \Delta q_{i,j,k+1}^n \right) \right\} = rhs_{ijk}^n \\ rhs_{ijk} = -\Delta t \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left( (H_1)_{i+1/2,j,k} - (H_1)_{i-1/2,j,k} \right) \right. \\ + \frac{1}{\Delta y} \left( (H_2)_{i,j+1/2,k} - (H_2)_{i,j-1/2,k} \right) \\ \left. + \frac{1}{\Delta z} \left( (H_3)_{i,j,k+1/2} - (H_3)_{i,j,k-1/2} \right) + D_{ijk} + g_{ijk} \right\}, \\ q_{ijk}^{n+1} = q_{ijk}^n + \Delta q_{ijk}^n\end{aligned}$$

また非定常流れを曲線座標格子を用いて計算する場合には次のようになる .

$$\begin{aligned}\Delta q_{ijk}^{(m)} + \Delta t \theta \left\{ (\mathfrak{A}_1^+)_{ijk}^n \Delta q_{i-1,j,k}^{(m)} + |\mathfrak{A}_1|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^{(m)} + (\mathfrak{A}_1^-)_{ijk}^n \Delta q_{i+1,j,k}^{(m)} \right. \\ + (\mathfrak{A}_2^+)_{ijk}^n \Delta q_{i,j-1,k}^{(m)} + |\mathfrak{A}_2|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^{(m)} + (\mathfrak{A}_2^-)_{ijk}^n \Delta q_{i,j+1,k}^{(m)} \\ \left. + (\mathfrak{A}_3^+)_{ijk}^n \Delta q_{i,j,k-1}^{(m)} + |\mathfrak{A}_3|_{ijk}^n \Delta q_{ijk}^{(m)} + (\mathfrak{A}_3^-)_{ijk}^n \Delta q_{i,j,k+1}^{(m)} \right\} \\ = -(q_{ijk}^{(m-1)} - q_{ijk}^n) + \frac{1}{2} (\widehat{rhs}_{ijk}^n + \widehat{rhs}_{ijk}^{(m-1)}) \\ \widehat{rhs}_{ijk} = -\Delta t \left\{ (\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k} - (\hat{H}_1)_{i-1/2,j,k} + (\hat{H}_2)_{i,j+1/2,k} - (\hat{H}_2)_{i,j-1/2,k} \right. \\ \left. + (\hat{H}_3)_{i,j,k+1/2} - (\hat{H}_3)_{i,j,k-1/2} + \hat{D}_{ijk} + \hat{g}_{ijk} \right\}, \\ q_{ijk}^{(m)} = q_{ijk}^{(m-1)} + \Delta q_{ijk}^{(m)}\end{aligned}$$

### 17.6.5 有限体積法の高次コンパクト TVD スキーム

式 (17.123) はそのすべての  $\Delta q$  を以下に示すように  $Dq$  で置き換えることによって 4 次または 5 次に行うことができる。

$$\begin{aligned} q_{l+1/2}^L &= q_l + \frac{1}{6} D\tilde{q}_{l-1/2} + \frac{1}{3} D\tilde{q}_{l+1/2}, \\ q_{l+1/2}^R &= q_{l+1} - \frac{1}{6} D\tilde{q}_{l+3/2} - \frac{1}{3} D\tilde{q}_{l+1/2} \end{aligned} \quad (17.158a)$$

$$\begin{aligned} D\tilde{q}_{j+1/2} &= \min\text{mod}(Dq_{j+1/2}, bDq_{j-1/2}) & (j = l, l+1) \\ D\tilde{q}_{j+1/2} &= \min\text{mod}(Dq_{j+1/2}, bDq_{j+3/2}) & (j = l-1, l) \end{aligned} \quad (17.158b)$$

4 次スキームの場合には,  $Dq$  は次のように 1 つの式で統一的に与えることもできる。

$$Dq_{j+1/2} = \Delta q_{j+1/2} - \frac{1}{6} \Delta^3 \bar{q}_{j+1/2} \quad (j = l, l\pm 1) \quad (17.159)$$

また 5 次スキームでは,  $Dq$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} Dq_{l+1/2} &= \Delta q_{l+1/2} - \frac{3}{20} \Delta^3 \bar{q}_{l+1/2}, \\ Dq_{j+1/2} &= \Delta q_{j+1/2} - \frac{1}{5} \Delta^3 \bar{q}_{j+1/2} \end{aligned} \quad (j = l\pm 1) \quad (17.160)$$

この高次化に際しての不安定性を除くために, 3 階差分  $\Delta^3 q$  は次のように置かれる。

$$\begin{aligned} \Delta^3 \bar{q}_{j+1/2} &= \Delta^2 \tilde{q}_{j+1} - \Delta^2 \tilde{q}_j \\ \Delta^2 \tilde{q}_{j+1} &= \min\text{mod}(\Delta^2 q_{j+1}, b' \Delta^2 q_j), \quad \Delta^2 \tilde{q}_j = \min\text{mod}(\Delta^2 q_j, b' \Delta^2 q_{j+1}) \end{aligned} \quad (17.161)$$

式 (17.158b) の  $b$ , 式 (17.161) の  $b'$  は通常 4 に取られる。

$q$  のセル境界面における不連続 (跳躍量)  $\delta q$  の値は,  $q(x)$  が滑らかで制限関数の働かないところでは

$$\delta q \equiv q_{l+1/2}^R - q_{l+1/2}^L = \begin{cases} -\frac{1}{6} \Delta^3 q_{l+1/2} & (3 \text{ 次スキーム}) \\ \frac{1}{4!} (1-\phi) \Delta^5 q_{l+1/2} & (4 \text{ 次または } 5 \text{ 次スキーム}) \end{cases} \quad (17.162)$$

となり一般に非常に小さい。しかしながら 流れの不連続や制限関数の働くところではこの跳躍量は小さくなく前述のようにここに近似リーマン解が補われる。流れの不連続の近傍を除けばスキームの精度は 2 次でもよく 3 次精度あれば十分である。上記の 4 次以上の高次スキームを用いてもスキームの精度そのものが 4 次以上になるわけではないが, 近似多項式の次数が上がれば式の適応性ないし柔軟性が増し滑り面などの弱い不連続の呆け (smearing 不鮮明化) を防止することができることになる。

曲線座標格子の場合の式 (17.129) の  $q^L$ ,  $q^R$  に対しても上記と全く同様に高次化することができる。

## 17.7 計算の効率化

△形陰解法の式は，以前には 近似因子法を適用し 1 次元問題に分解し，更に対角化することによって計算量の軽減が図られていたが，その後 Jameson らによる LU-SGS 法の適用によってなお一層の計算量の削減が図られた．ここには袁新らによるその改良版についても述べる．

### 17.7.1 近似因子法

3 次元構造格子の未知変数の定義される格子点の数を  $I \times J \times K$  個とする．もともとの △形陰解法は，未知数の数  $5IJK$  の非常に大きい連立 1 次方程式を一つ解くものであった．これに Yanenko の近似因子法 (approximate-factorization)<sup>44</sup> を適用し 1 次元問題に分解すれば，未知数  $5I$  の連立 1 次方程式を  $JK$  個， $5J$  のものを  $KI$  個， $5K$  のものを  $IJ$  個解く問題になる．更に特性の理論によって対角化 (diagonalization) すれば，未知数  $I$  の連立 1 次方程式を  $5JK$  個， $J$  のものを  $5KI$  個， $K$  のものを  $5IJ$  個解く問題になり計算量はかなり軽減される．

解 法	未知数の数	方程式の数	係数行列の性質
△形陰解法のみ	$5IJK$	1	帯行列 (バンド幅 $2JK+1$ )
近似因子法を適用	$5I$	$JK$	$5 \times 5$ ブロック 3 重対角行列
	$5J$	$KI$	
	$5K$	$IJ$	
対角化を併用	$I$	$5JK$	スカラー 3 重対角行列
	$J$	$5KI$	
	$K$	$5IJ$	
LU-SGS-GE 法	5	$2IJK$	半対角化された行列

長方形格子，定常流れの場合の △形陰解法の式 (17.93) は近似因子法を適用し 1 次元問題に分解し更に対角化すれば次のようになる．

$$\begin{aligned}
 &R_1 \{I + \lambda_x (A_1^+ \nabla_x + A_1^- \Delta_x)\} M_{21}^{-1} \\
 &\quad \times \{I + \lambda_y (A_2^+ \nabla_y + A_2^- \Delta_y)\} M_{32}^{-1} \\
 &\quad \times \{I + \lambda_z (A_3^+ \nabla_z + A_3^- \Delta_z)\} L_3 \Delta q^n = rhs^n
 \end{aligned} \tag{17.163}$$

ただし  $\lambda_{x_i} = \theta \Delta t / \Delta x_i$ ， $M_{21} = L_2 R_1$ ， $M_{32} = L_3 R_2$ ，また  $\nabla_{x_i}$ ， $\Delta_{x_i}$  は  $x_i$  方向の後退または前進差分で， $A_i^+ \nabla_{x_i} + A_i^- \Delta_{x_i}$  は 1 次上流差分の演算子である． $M_{21}$ ， $M_{32}$  の成分の式は， $R_1$ ， $L_2$ ， $R_2$ ， $L_3$  に含まれる熱

<sup>44</sup> Yanenko, N.N., On the implicit difference computing methods for solving multidimensional heat conduction equations (Russian), *Izv. Uchebn. Zaved., Matematika*, 4(1961), 148-157.  
 Yanenko, N.N., The Method of Fractional Steps. Springer-Verlag, Berlin, 1971.  
 Beam, R.M. and Warming, R.F., An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, 16(1978), 393-402.

力学的状態量はすべて消え次のようになる<sup>45</sup> .

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (17.164a)$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (17.164b)$$

式 (17.163) は次のように 7 段階に分けて解かれる .

$$\begin{aligned} q^1 &= L_1 r h s^n, \\ \{I + \lambda_x (A_1^+ \nabla_x + A_1^- \Delta_x)\} q^2 &= q^1, \\ q^3 &= M_{21} q^2, \\ \{I + \lambda_y (A_2^+ \nabla_y + A_2^- \Delta_y)\} q^4 &= q^3, \\ q^5 &= M_{32} q^4, \\ \{I + \lambda_z (A_3^+ \nabla_z + A_3^- \Delta_z)\} q^6 &= q^5, \\ \Delta q^n &= R_3 q^6 \end{aligned} \quad (17.165)$$

この 7 段階のうち奇数段階は各格子点ごとのベクトルと行列の積の計算である . また偶数段階は未知変数  $q^2, q^4$  または  $q^6$  の連立 1 次方程式の計算であるが , その係数行列は帯行列で 5 組のスカラー 3 重対角行列の連立 1 次方程式を解く計算になる . 例えば第 2 段階は  $x$  方向に並ぶ  $I$  個の点列に対し各 5 個の連立 1 次方程式 , 都合  $5JK$  個の連立 1 次方程式を解く計算になる .

非保存形の式 (17.110) に対しては ,  $\Delta$  形陰解法の式は次のように因子化できる .

$$\begin{aligned} R_1^* \{I + \lambda_x (A_1^+ \nabla_x + A_1^- \Delta_x)\} M_{21}^{-1} \{I + \lambda_y (A_2^+ \nabla_y + A_2^- \Delta_y)\} M_{32}^{-1} \\ \times \{I + \lambda_z (A_3^+ \nabla_z + A_3^- \Delta_z)\} L_3^* \Delta q^{*n} = N r h s^n \end{aligned} \quad (17.166)$$

この式も上記のように 7 段階に分けて解くことができる .

残りの  $\Delta$  形陰解法の式も同様に近似因子化 , 対角化して解くことができる . 曲線座標格子 , 非定常流れの場合の式 (17.96) は次のようになる .

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 \{I + \lambda (\tilde{A}_1^+ \nabla_\xi + \tilde{A}_1^- \Delta_\xi)\} \tilde{M}_{21}^{-1} \{I + \lambda (\tilde{A}_2^+ \nabla_\eta + \tilde{A}_2^- \Delta_\eta)\} \tilde{M}_{32}^{-1} \\ \times \{I + \lambda (\tilde{A}_3^+ \nabla_\zeta + \tilde{A}_3^- \Delta_\zeta)\} \tilde{L}_3 \Delta \tilde{q}^{(m)} = -(\tilde{q}^{(m-1)} - \tilde{q}^n) + \frac{1}{2} (\widetilde{rhs}^n + \widetilde{rhs}^{(m-1)}) \end{aligned} \quad (17.167)$$

<sup>45</sup>  $M_{21} = L_2 R_1 = L_2^* R_1^*$

ただし  $\lambda = \theta \Delta t$ ,  $\tilde{M}_{21} = \tilde{L}_2 \tilde{R}_1$ ,  $\tilde{M}_{32} = \tilde{L}_3 \tilde{R}_2$  また  $\tilde{A}_i^+ \nabla_{\xi_i} + \tilde{A}_i^- \Delta_{\xi_i}$  は  $\xi_i$  方向の 1 次上流差分演算子である .  $\tilde{M}_{21}$ ,  $\tilde{M}_{32}$  は成分の式で表せば次のように測度テンソル成分のみの関数になる<sup>46</sup> .

$$\tilde{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{g^{21} g^{12}}{g^{11} g^{22}} \right\} & -\frac{g^{12}}{g^{22}} & 0 & \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{g^{21} g^{12}}{g^{11} g^{22}} \right\} \\ 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{21}}{g^{11}} + \sqrt{g^{22}/g^{11}} \right\} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{21}}{g^{11}} - \sqrt{g^{22}/g^{11}} \right\} \\ 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{31}}{g^{11}} - \frac{g^{21} g^{32}}{g^{11} g^{22}} \right\} & -\frac{g^{32}}{g^{22}} & 1 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{31}}{g^{11}} - \frac{g^{21} g^{32}}{g^{11} g^{22}} \right\} \\ 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{21}}{g^{11}} - \sqrt{g^{22}/g^{11}} \right\} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{21}}{g^{11}} + \sqrt{g^{22}/g^{11}} \right\} \end{pmatrix} \quad (17.168a)$$

$$\tilde{M}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{12}}{g^{22}} - \frac{g^{32} g^{13}}{g^{22} g^{33}} \right\} & -\frac{g^{13}}{g^{33}} & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{12}}{g^{22}} - \frac{g^{32} g^{13}}{g^{22} g^{33}} \right\} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{g^{32} g^{23}}{g^{22} g^{33}} \right\} & -\frac{g^{23}}{g^{33}} & \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{g^{32} g^{23}}{g^{22} g^{33}} \right\} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{32}}{g^{22}} + \sqrt{g^{33}/g^{22}} \right\} & 1 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{32}}{g^{22}} - \sqrt{g^{33}/g^{22}} \right\} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{32}}{g^{22}} - \sqrt{g^{33}/g^{22}} \right\} & 1 & \frac{1}{2} \left\{ \frac{g^{32}}{g^{22}} + \sqrt{g^{33}/g^{22}} \right\} \end{pmatrix} \quad (17.168b)$$

式 (17.167) も 7 段階に分けて同様に解かれる .

非保存形の式 (17.114) に対しては ,  $\Delta$  形陰解法の式は次のように因子化できる .

$$\begin{aligned} & \tilde{R}_1^* \{ I + \lambda (\tilde{A}_1^+ \nabla_{\xi} + \tilde{A}_1^- \Delta_{\xi}) \} \tilde{M}_{21}^{-1} \{ I + \lambda (\tilde{A}_2^+ \nabla_{\eta} + \tilde{A}_2^- \Delta_{\eta}) \} \tilde{M}_{32}^{-1} \\ & \times \{ I + \lambda (\tilde{A}_3^+ \nabla_{\zeta} + \tilde{A}_3^- \Delta_{\zeta}) \} \tilde{L}_3^* \Delta \tilde{q}^{*(m)} = -(\tilde{q}^{*(m-1)} - \tilde{q}^{*n}) + \frac{\tilde{N}}{2J} (\widetilde{rhs}^n + \widetilde{rhs}^{(m-1)}) \end{aligned} \quad (17.169)$$

ただし  $\tilde{q}^*$  は式 (17.89b) で定義されたものである . この式も 7 段階に分けて同様に解かれる .

## 17.7.2 LU-SGS 法

次に LU-SGS 法 (lower-upper symmetric Gauss-Seidel method)<sup>47</sup> について述べる . この方法では  $\Delta$  形陰解法の式 (17.93) に流束分離法を適用した式 (17.109) は次のように書き換えられる .

$$\begin{aligned} & -\lambda_x (A_1^+)_{ijk} \Delta q_{i-1,j,k}^n - \lambda_y (A_2^+)_{ijk} \Delta q_{i,j-1,k}^n - \lambda_z (A_3^+)_{ijk} \Delta q_{i,j,k-1}^n \\ & + \{ (I + \lambda_x |A_1| + \lambda_y |A_2| + \lambda_z |A_3|) \Delta q^n \}_{ijk} \\ & + \lambda_x (A_1^-)_{ijk} \Delta q_{i+1,j,k}^n + \lambda_y (A_2^-)_{ijk} \Delta q_{i,j+1,k}^n + \lambda_z (A_3^-)_{ijk} \Delta q_{i,j,k+1}^n = rhs_{ijk}^n \end{aligned} \quad (17.170)$$

<sup>46</sup>  $\tilde{M}_{21} = \tilde{L}_2 \tilde{R}_1 = \tilde{L}_2^* \tilde{R}_1^*$

<sup>47</sup> Jameson, A. and Yoon, S., Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA J.*, **25**(1987), 929–935.

Yoon, S. and Kwak, D., Implicit Navier-Stokes solver for three-dimensional compressible flows. *AIAA J.*, **30**(1992), 2653–59.

ただし  $\lambda_{x_i} = \theta \Delta t / \Delta x_i$  である。いま

$$\begin{aligned} & -\lambda_x (A_1^+)_{ijk} \Delta q_{i-1,j,k}^n - \lambda_y (A_2^+)_{ijk} \Delta q_{i,j-1,k}^n - \lambda_z (A_3^+)_{ijk} \Delta q_{i,j,k-1}^n \equiv (\mathcal{L} \Delta q^n)_{ijk} \\ & \{(I + \lambda_x |A_1| + \lambda_y |A_2| + \lambda_z |A_3|) \Delta q^n\}_{ijk} \equiv (\mathcal{D} \Delta q^n)_{ijk} \\ & \lambda_x (A_1^-)_{ijk} \Delta q_{i+1,j,k}^n + \lambda_y (A_2^-)_{ijk} \Delta q_{i,j+1,k}^n + \lambda_z (A_3^-)_{ijk} \Delta q_{i,j,k+1}^n \equiv (\mathcal{U} \Delta q^n)_{ijk} \end{aligned}$$

と置くことにすれば上式は次のようになる。

$$(\mathcal{U} + \mathcal{D} + \mathcal{L}) \Delta q^n = rhs^n \quad (17.171a)$$

ただし  $\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{U}$  は演算子で

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_i \lambda_{x_i} A_i^+ (\nabla_{x_i} - 1), \\ \mathcal{D} &= I + \sum_i \lambda_{x_i} |A_i|, \\ \mathcal{U} &= \sum_i \lambda_{x_i} A_i^- (\Delta_{x_i} + 1) \end{aligned} \quad (17.171b)$$

なお  $\nabla_{x_i}, \Delta_{x_i}$  は後退差分または前進差分の演算子で,  $\nabla_x (\Delta q_{ijk}^n) = \Delta q_{ijk}^n - \Delta q_{i-1,j,k}^n$ ,  $\Delta_x (\Delta q_{ijk}^n) = \Delta q_{i+1,j,k}^n - \Delta q_{ijk}^n$  である。

LU-SGS 法では因子化が

$$(\mathcal{D} + \mathcal{L}) \mathcal{D}^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta q^n = rhs^n \quad (17.172a)$$

のように行われ, この式は 2 段階に分けて解かれる<sup>48</sup>。

$$q^* = \mathcal{D}^{-1} (rhs^n - \mathcal{L} q^*), \quad (17.172b)$$

$$\Delta q^n = q^* - \mathcal{D}^{-1} \mathcal{U} \Delta q^n \quad (17.172c)$$

式 (17.172b) の計算は,  $i + j + k = 3$  の点から始め,  $i + j + k = \text{const.}$  面上の点の式をできるだけ並列処理するように進め,  $i + j + k = I + J + K$  の点まで掃引される。また式 (17.172c) の計算は,  $i + j + k = I + J + K$  の点から逆向きに  $i + j + k = 3$  の点まで掃引される。この前半の計算では, 2 次元の場合には図 17.14 に示すように,  $\circ$  印で示す  $i + j = 8$  線上の点の  $q^*$  の値は  $\bullet$  印で示す  $i + j = 7$  線上の点の  $q^*$  の既知の値から求めることができる。3 次元の場合も同様のことが言える。

式 (17.172a) の左辺の演算子は  $(\mathcal{D} + \mathcal{L}) \mathcal{D}^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{U}) = \mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U} + \mathcal{L} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{U}$  のように書換えられるから, 基の式 (17.171a) のものと比べれば, この式の因子化に伴う (左辺の演算子の) 誤差は  $\mathcal{L} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{U}$  となる。  $\mathcal{L}, \mathcal{D}, \mathcal{U}$  の大きさはクーラン数の大きさで, この誤差  $\mathcal{L} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{U}$  の大きさもクーラン数の大きさである。一方, 前記の在来型の近似因子法では相当の誤差は 2 次元ではクーラン数の 2 乗, 3 次元ではクーラン数の 3 乗になる。このゆえに LU-SGS 型解法は, 大きい Courant 数に対しても解が不安定になりにくく, Courant 数を大きく取って計算を加速することができる。

<sup>48</sup>  $\mathcal{D}^{-1} (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta q^n = q^*$  と置けば次式が得られる。

$$(\mathcal{D} + \mathcal{L}) q^* = rhs^n, \quad (\mathcal{D} + \mathcal{U}) \Delta q^n = \mathcal{D} q^*$$

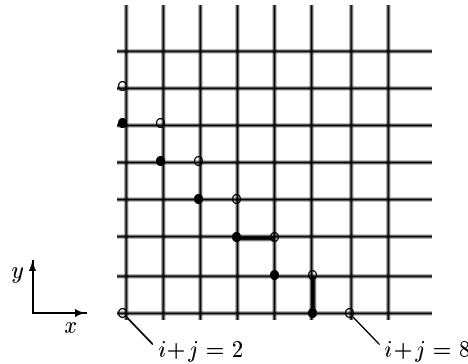


図 17.14: 2次元問題の LU-SGS 法

Jameson らの LU-SGS 法では、式 (17.172) の  $\mathcal{D}^{-1}$  の計算を容易にするために、行列  $\mathcal{D}$  が次のように対角化近似される。

$$A_i^\pm = (A_i \pm \rho_i I) / 2, \quad |A_i| = A_i^+ - A_i^- = \rho_i I \quad (17.173)$$

ただし  $\rho_i = 1.01 \times |\lambda_{i \max}|$ 、 $\lambda_{i \max}$  は  $A_i$  の最大固有値である。この解法は簡明で優れた方法である。

この対角化近似はしかしながら  $\Delta$  形陰解法の反復計算の収束性を悪くする。袁らによる LU-SGS-GE 法は、式 (17.172) を対角化近似せずにガウス消去法で正確に解くものである。LU-SGS-GE 法では LU-SGS 法の  $\mathcal{D}$  を固有ベクトルの行列  $L_i, R_i$  を用い  $\mathcal{D} = R_i \mathfrak{B} L_i$  のように置く。このとき  $\mathfrak{B}$  は後で示すように半対角化された行列になる<sup>49</sup>。今  $q^* = q^3$  と書くことにすれば式 (17.172) は

$$R_i \mathfrak{B} L_i q^3 = rhs^n - \mathcal{L} q^3 \quad (17.174a)$$

$$R_i \mathfrak{B} L_i \Delta q^n = \mathcal{D} q^3 - \mathcal{M} \Delta q^n \quad (17.174b)$$

となる。これらの式は、 $\mathfrak{B} L_i q^3 = q^1$ 、 $L_i q^3 = q^2$ 、 $\mathfrak{B} L_i \Delta q^n = q^4$ 、 $L_i \Delta q^n = q^5$  と置き、それぞれ 3 段階に分けて解くことができる。結局 LU-SGS-GE 法では、式 (17.172a) が次のように 6 段階に分けて解かれることになる。

$$\begin{aligned} q^1 &= L_i (rhs^n - \mathcal{L} q^3), \\ \mathfrak{B} q^2 &= q^1, \\ q^3 &= R_i q^2, \\ q^4 &= q^1 - L_i \mathcal{M} \Delta q^n, \\ \mathfrak{B} q^5 &= q^4, \\ \Delta q^n &= R_i q^5 \end{aligned} \quad (17.175a)$$

ただし

$$\mathfrak{B} = L_i \mathcal{D} R_i \quad (i = 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) \quad (17.175b)$$

これらの式の第 1, 3, 4, 6 段階は各計算点ごとのベクトルと行列の積の計算である。また第 2 段階と第 5 段階は連立 1 次方程式の計算で Gauss 消去法で解かれる。

<sup>49</sup> 半対角化の効果は、乱流の計算で乱れ量の輸送方程式が加わる場合にはより顕著である。

$\mathfrak{B}$  は長方形格子の場合には

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} &= L_1 \mathfrak{D} R_1 = L_1 (I + \lambda_x |A_1| + \lambda_y |A_2| + \lambda_z |A_3|) R_1 \\ &= I + \lambda_x |A_1| + \lambda_y M_{12} |\Lambda_2| M_{21} + \lambda_z M_{13} |\Lambda_3| M_{31}\end{aligned}\quad (17.176a)$$

ただし  $M_{12} = L_1^* R_2^*$ ,  $M_{21} = L_2^* R_1^*$ ,  $M_{13} = L_1^* R_3^*$ ,  $M_{31} = L_3^* R_1^*$  である .

$$\begin{aligned}M_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ M_{12} |\Lambda_2| M_{21} &= \begin{pmatrix} |\lambda_2^1| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\lambda_2^1|}{2} + \frac{|\lambda_2^2|}{4} + \frac{|\lambda_2^3|}{4} & \frac{|\lambda_2^2|}{2} - \frac{|\lambda_2^3|}{2} & 0 & \frac{|\lambda_2^1|}{2} - \frac{|\lambda_2^2|}{4} - \frac{|\lambda_2^3|}{4} \\ 0 & \frac{|\lambda_2^2|}{4} - \frac{|\lambda_2^3|}{4} & \frac{|\lambda_2^2|}{2} + \frac{|\lambda_2^3|}{2} & 0 & -\frac{|\lambda_2^2|}{4} + \frac{|\lambda_2^3|}{4} \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_2^1| & 0 \\ 0 & \frac{|\lambda_2^1|}{2} - \frac{|\lambda_2^2|}{4} - \frac{|\lambda_2^3|}{4} & -\frac{|\lambda_2^2|}{2} + \frac{|\lambda_2^3|}{2} & 0 & \frac{|\lambda_2^1|}{2} + \frac{|\lambda_2^2|}{4} + \frac{|\lambda_2^3|}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (17.176b)$$

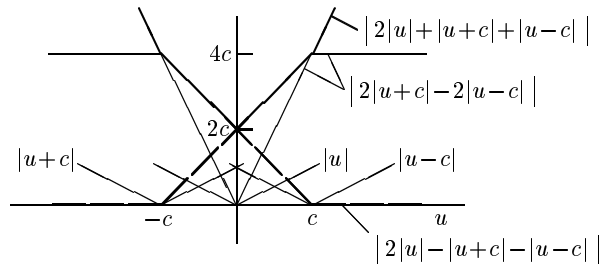
ただし  $\lambda_i^1 = u_i$ ,  $\lambda_i^2 = u_i + c$ ,  $\lambda_i^3 = u_i - c$  である . 同様に

$$M_{13} |\Lambda_3| M_{31} = \begin{pmatrix} |\lambda_3^1| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\lambda_3^1|}{2} + \frac{|\lambda_3^2|}{4} + \frac{|\lambda_3^3|}{4} & 0 & \frac{|\lambda_3^2|}{2} - \frac{|\lambda_3^3|}{2} & \frac{|\lambda_3^1|}{2} - \frac{|\lambda_3^2|}{4} - \frac{|\lambda_3^3|}{4} \\ 0 & 0 & |\lambda_3^1| & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\lambda_3^2|}{4} - \frac{|\lambda_3^3|}{4} & 0 & \frac{|\lambda_3^2|}{2} + \frac{|\lambda_3^3|}{2} & -\frac{|\lambda_3^2|}{4} + \frac{|\lambda_3^3|}{4} \\ 0 & \frac{|\lambda_3^1|}{2} - \frac{|\lambda_3^2|}{4} - \frac{|\lambda_3^3|}{4} & 0 & -\frac{|\lambda_3^2|}{2} + \frac{|\lambda_3^3|}{2} & \frac{|\lambda_3^1|}{2} + \frac{|\lambda_3^2|}{4} + \frac{|\lambda_3^3|}{4} \end{pmatrix}\quad (17.176c)$$

式 (17.176b) の行列が優対角 (diagonally dominant) であることは, 第 1, 3, 4 行に対しては明らかで, 残る第 2 行と第 5 行についても下図を参照すれば次式が成立するので明らかである .

$$|2|u| + |u+c| + |u-c| | \geq |2|u+c| - 2|u-c| | + |2|u| - |u+c| - |u-c| |$$

また式 (17.176c) の行列も同様に優対角で, 行列  $\mathfrak{B}$  は優対角行列である .





非保存形方程式は，保存形に比べかなり簡単になるが，在来の近似因子法では前記のように，両者の最終的に解かれる式は実質的に同等のものであった．次に LU-SGS 法ではどのようなかを見ていこう．非保存形の式 (17.110) は次のように書き換えられる．

$$(\mathfrak{U}^* + \mathfrak{D}^* + \mathfrak{L}^*)\Delta q^{*n} = N rhs^n \equiv rhs^{*n} \quad (17.177a)$$

ただし演算子  $\mathfrak{L}^*$ ,  $\mathfrak{D}^*$ ,  $\mathfrak{U}^*$  は次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^* &= \sum_i \lambda_{x_i} A_i^{*+} (\nabla_{x_i} - 1), \\ \mathfrak{D}^* &= I + \sum_i \lambda_{x_i} |A_i^*|, \\ \mathfrak{U}^* &= \sum_i \lambda_{x_i} A_i^{*-} (\Delta_{x_i} + 1) \end{aligned} \quad (17.177b)$$

この方法では因子化が

$$(\mathfrak{D}^* + \mathfrak{L}^*)\mathfrak{D}^{*-1}(\mathfrak{D}^* + \mathfrak{U}^*)\Delta q^{*n} = rhs^{*n} \quad (17.178a)$$

のように行われ，この式は 2 段階に分けて解かれる．

$$q^{**} = \mathfrak{D}^{*-1}(rhs^{*n} - \mathfrak{L}^* q^{**}), \quad (17.178b)$$

$$\Delta q^{*n} = q^{**} - \mathfrak{D}^{*-1}\mathfrak{U}^* \Delta q^{*n} \quad (17.178c)$$

Jameson らの LU-SGS 法では，式 (17.172) の  $\mathfrak{D}^{*-1}$  の計算を容易にするために，行列  $\mathfrak{D}^*$  は次のように対角化近似される．

$$A_i^{*\pm} = (A_i^* \pm \rho_i I) / 2, \quad |A_i^*| = A_i^{*+} - A_i^{*-} = \rho_i I \quad (17.179)$$

演算子  $\mathfrak{L}^*$  と  $\mathfrak{U}^*$  は  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{U}$  に比べ簡単になるが問題の  $\mathfrak{D}^*$  は  $\mathfrak{D}$  と同じである．

また LUSGS-GE 法では， $\mathfrak{D}^* = R_i^* \mathfrak{B}^* L_i^*$  と置かれるが，

$$\mathfrak{B}^* = L_i^* \mathfrak{D}^* R_i^* = L_i \mathfrak{D} R_i = \mathfrak{B}$$

となり，式 (17.178) は次のように置かれる．

$$R_i^* \mathfrak{B} L_i^* q^{*3} = rhs^{*n} - \mathfrak{L}^* q^{*3} \quad (17.180a)$$

$$R_i^* \mathfrak{B} L_i^* \Delta q^{*n} = \mathfrak{D}^* q^{*3} - \mathfrak{U}^* \Delta q^{*n} \quad (17.180b)$$

これらの式は上記のようにそれぞれ 3 段階に分けて解くことができる．それらの式の中の  $q^1, q^2, q^4, q^5$  は保存形のものと同じ値になり，ガウス消去法による連立 1 次方程式の計算量も保存形の場合と同じであるが，全体の計算量は多少少なくなる．

次に曲線座標格子の場合の LU-SGS-GE 法について述べる．その諸式は長方形格子の場合の式の  $A, \Delta q, rhs, \mathfrak{L}, \mathfrak{D}, \mathfrak{U}, \mathfrak{B}$  に上添え字 “~” を付けたものになる．また  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  はすべて  $\lambda = \theta \Delta t$  と置かれる．それらの

式の部分段階法による解き方は上記と同じになるのでここでは省略し，LU-SGS-GE 法の  $\tilde{\mathfrak{B}}$  の式のみ示すことにする．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{B}} &= \tilde{L}_1 \tilde{\mathfrak{D}} \tilde{R}_1 = \tilde{L}_1 \{I + \lambda(|\tilde{A}_1| + |\tilde{A}_2| + |\tilde{A}_3|)\} \tilde{R}_1 \\ &= I + \lambda(|\hat{\Lambda}_1| + \tilde{M}_{12}|\hat{\Lambda}_2| \tilde{M}_{21} + \tilde{M}_{13}|\hat{\Lambda}_3| \tilde{M}_{31})\end{aligned}\quad (17.181a)$$

$$\tilde{M}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2a}(1+b) & 0 & -\frac{1}{2a}(1-b) \\ 0 & -\frac{g^{12}}{g^{11}} & \frac{c}{2} & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & -\frac{g^{13}}{g^{11}} & -\frac{1}{2}(1-b^2) & 1 & -\frac{1}{2}(1-b^2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2a}(1-b) & 0 & \frac{1}{2a}(1+b) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-b^2) & -\frac{g^{12}}{g^{22}} & 0 & \frac{1}{2}(1-b^2) \\ 0 & \frac{1}{2}a(1+b) & 1 & 0 & -\frac{1}{2}a(1-b) \\ 0 & -\frac{1}{2}g_{13}/J^2 g^{11} g^{22} & -\frac{g^{32}}{g^{22}} & 1 & -\frac{1}{2}g_{13}/J^2 g^{11} g^{22} \\ 0 & -\frac{1}{2}a(1-b) & 1 & 0 & \frac{1}{2}a(1+b) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}_{12}|\hat{\Lambda}_2| \tilde{M}_{21} = \begin{pmatrix} |\hat{\lambda}_2^1| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-b^2)\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} + (1+b)^2\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} + (1-b)^2\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(1-b^2)\left\{-b\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} + (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} - (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ac\left\{b\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} - (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} + (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-b^2)\left(\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} - \frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a}\left\{-b|\hat{\lambda}_2^1| + (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{2} - (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{2}\right\} & 0 & (1-b^2)\left(\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} - \frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right) & 0 & 0 \\ b^2|\hat{\lambda}_2^1| + (1-b^2)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{2} + (1-b^2)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{2} & 0 & a(1-b^2)\left\{-b\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} - (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} + (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right\} & 0 & 0 \\ c\left(|\hat{\lambda}_2^1| - \frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{2}\right) & |\hat{\lambda}_2^1| & ac\left\{b\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} + (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} - (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4}\right\} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a}\left\{-b|\hat{\lambda}_2^1| - (1-b)\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{2} + (1+b)\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{2}\right\} & 0 & (1-b^2)\frac{|\hat{\lambda}_2^1|}{2} + (1-b)^2\frac{|\hat{\lambda}_2^2|}{4} + (1+b)^2\frac{|\hat{\lambda}_2^3|}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (17.181b)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{13}|\hat{\lambda}_3|\tilde{M}_{31} = & \begin{pmatrix} |\hat{\lambda}_3^1| & 0 & 0 \\ 0 & (1-e^2)\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} + (1+e)^2\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} + (1-e)^2\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4} & 0 \\ 0 & df\left\{e\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} - (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} + (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right\} & |\hat{\lambda}_3^1| \\ 0 & d(1-e^2)\left\{-e\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} + (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} - (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right\} & 0 \\ 0 & (1-e^2)\left(\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} - \frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right) & 0 \end{pmatrix} \\
& \left. \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{d}\left\{-e|\hat{\lambda}_3^1| + (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{2} - (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{2}\right\} \\ f\left(|\hat{\lambda}_3^1| - \frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{2}\right) \\ e^2|\hat{\lambda}_3^1| + (1-e^2)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{2} + (1-e^2)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{2} \\ \frac{1}{d}\left\{-e|\hat{\lambda}_3^1| - (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{2} + (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{2}\right\} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ (1-e^2)\left(\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} - \frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} - \frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right) \\ df\left\{e\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} + (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} - (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right\} \\ d(1-e^2)\left\{-e\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} - (1-e)\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} + (1+e)\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4}\right\} \\ (1-e^2)\frac{|\hat{\lambda}_3^1|}{2} + (1-e)^2\frac{|\hat{\lambda}_3^2|}{4} + (1+e)^2\frac{|\hat{\lambda}_3^3|}{4} \end{array} \right\} \quad (17.181c)
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_i^1 &= U_i, & \hat{\lambda}_i^2 &= U_i + \sqrt{g^{ii}}c, & \hat{\lambda}_i^3 &= U_i - \sqrt{g^{ii}}c \\
a &= \sqrt{g^{22}/g^{11}}, & b &= g^{12}/\sqrt{g^{11}g^{22}}, & c &= g_{23}/J^2 g^{11} g^{22} \\
d &= \sqrt{g^{33}/g^{11}}, & e &= g^{13}/\sqrt{g^{11}g^{33}}, & f &= g_{23}/J^2 g^{11} g^{33}
\end{aligned}$$

である<sup>50</sup>。曲線座標格子の場合の行列  $\hat{\lambda}$  は半対角されるが優対角にならないので、このことに留意して Gauss 消去法で解かなければならない。この計算法では対角化近似をしていないので収束性が良く、計算時間はもとの LU-SGS 法に比べて一般にかなり少なくなる。

<sup>50</sup>

$$\begin{aligned}
g_{13}/J^2 &= g^{12}g^{23} - g^{22}g^{13}, \\
g_{23}/J^2 &= g^{12}g^{13} - g^{11}g^{23}, \\
g_{33}/J^2 &= g^{11}g^{22} - (g^{12})^2, \\
g^{11}g_{13} + g^{12}g_{23} + g^{13}g_{33} &= 0
\end{aligned}$$

## 主な記号

添字  $\wedge$  または Fraktur 体文字 一般曲線座標系の方程式

添字  $\sim$  一般曲線座標系の質量流束の方程式

添字  $*$  非保存形方程式

添字  $\bar{\phantom{x}}$  Roe の近似リーマン解 式 (17.143)(17.155) 等

添字  $+$  正の固有値, 正方向に伝播する波

添字  $-$  負の固有値, 負方向に伝播する波

$A_i$  ヤコビ行列 式 (17.69b)

$\mathfrak{A}_i \equiv \hat{A}_i$  ヤコビ行列 式 (17.79b)

$\tilde{A}_i$  ヤコビ行列 式 (17.87b)

$A_i^*$  式 (17.70b)

$\mathfrak{A}_i^* \equiv \hat{A}_i^*$  式 (17.80b)

$\tilde{A}_i^*$  式 (17.89b)

$A_i^{*\pm}$  分離された  $A_i^*$  式 (17.103)

$\mathfrak{A}_i^{*\pm}$  分離された  $\mathfrak{A}_i^*$  式 (17.106)

$\tilde{A}_i^{*\pm}$  分離された  $\tilde{A}_i^*$  式 (17.113)

$B$  式 (17.65c)

$c = \sqrt{\gamma RT}$  音速

$c_p, c_v$  定圧比熱, 定積比熱

$D$  拡散項 式 (17.51b)

$\hat{D}$  拡散項 式 (17.64b)

$\tilde{D}$  拡散項 式 (17.65b)

$DF_{j+1/2}^\pm$   $F^\pm$  の高次化された差分 式 (17.117)(17.118)

$Dq_{j+1/2}$   $q$  の高次化された差分 式 (17.159)(17.160)

$e = \rho(\epsilon + \mathbf{u}^2/2)$  単位体積当たりの岐点内部エネルギー

$F_i$  流束ベクトル 式 (17.51b)

$\mathfrak{F}_i \equiv \hat{F}_i$  流束ベクトル 式 (17.64b)

$\tilde{F}_i$  流束ベクトル 式 (17.65b)

$g$  外力項 式 (17.51b)

$\hat{g}$  外力項 式 (17.64b)

$\tilde{g}$  外力項 式 (17.65b)

$g^{ij}$  測度テンソル 式 (17.57)

$g_{ij}$  測度テンソル 式 (17.63)

$H = h + \mathbf{u}^2/2 = (e + p)/\rho$  岐点エンタルピー

$H_{l+1/2}$  数値流束 式 (17.98)(17.116)

$H_{l+1/2}$  数値流束 式 (17.101)

$(H_1)_{i+1/2,j,k}$  数値流束  $F_1$  のセル境界面  $x_{i+1/2}$  の平均値 式 (17.144)

$(\hat{H}_1)_{i+1/2,j,k}$  数値流束  $\mathfrak{F}_1$  のセル境界面  $\xi_{i+1/2}$  の平均値 式 (17.156)

$h = \epsilon + p/\rho$  比エンタルピー

$I$  単位行列

$J$  ヤコビアン 式 (17.53)

$\mathfrak{K}_i \equiv \hat{\Lambda}_i$  固有値  $\mathfrak{k}_i$  の対角行列

$\mathfrak{k}_i \equiv \hat{\lambda}_i$  固有値, 圧力波などの位相速度の  $\xi_i$  成分

$L_i = L_i^* N$  左固有ベクトルの行列 式 (17.74b)

$\hat{L}_i = \hat{L}_i^* N$  左固有ベクトルの行列 式 (17.82b)

$\tilde{L}_i = \tilde{L}_i^* \tilde{N}$  左固有ベクトルの行列 式 (17.91b)

$M = |\mathbf{u}|/c$  マッハ数

$M_{ij} = L_i R_j = L_i^* R_j^*$  式 (17.164)(17.176)

$\tilde{M}_{ij} = \tilde{L}_i \tilde{R}_j = \tilde{L}_i^* \tilde{R}_j^*$  式 (17.168)(17.181)

$N$  保存形から非保存形への変換の行列 式 (17.72)

$\tilde{N}$  保存形から非保存形への変換の行列 式 (17.88)

$P_r = c_p \mu / \kappa$  プラントル数

$p$  静圧

$q$  未知変数ベクトル 式 (17.51b)

$q \equiv \hat{q}$  未知変数ベクトル 式 (17.64b)

$\tilde{q}$  未知変数ベクトル 式 (17.65b)

$q_{i+1/2}^L$  セル境界  $x_{i+1/2}$  の左側の  $q$  の平均値

$q_{i+1/2}^R$  セル境界  $x_{i+1/2}$  の右側の  $q$  の平均値

$q_{i+1/2}^L$  セル境界  $\xi_{i+1/2}$  の左側の  $q$  の平均値

$q_{i+1/2}^R$  セル境界  $\xi_{i+1/2}$  の右側の  $q$  の平均値

$q^*$  未知変数ベクトル 式 (17.70b)

$q^* \equiv \hat{q}^* = q^*$  未知変数ベクトル

$\tilde{q}^*$  未知変数ベクトル 式 (17.89b)

$q$  熱流束

$R$  気体定数

$R_i = N^{-1} R_i^*$  右固有ベクトルの行列 式 (17.74c)

$\hat{R}_i = N^{-1} \hat{R}_i^*$  右固有ベクトルの行列 式 (17.82c)

$\tilde{R}_i = \tilde{N}^{-1} \tilde{R}_i^*$  右固有ベクトルの行列 式 (17.91c)

$\tilde{R}$  付加項 式 (17.65b)

$rhs$  式 (17.93)

$\widetilde{rhs}$  式 (17.95)

$T$  静温度

$U$  反変速度 式 (17.59)

$u$  流速

$\alpha_i = (\partial x_k / \partial \xi_i) u_k = g_{ij} U_j$

$\gamma$  比熱比

$$\tilde{\gamma} = \gamma - 1$$

$$(\Delta F_i^\pm)_{j+1/2} \quad \text{分離された流束差分 式 (17.104)}$$

$$(\Delta \mathcal{F}_i^\pm)_{j+1/2} \quad \text{分離された流束差分 式 (17.107)}$$

$$\Delta M_i \quad \text{運動量の差分 式 (17.104b)}$$

$$\Delta \mathcal{M}_i \quad \text{運動量の差分 式 (17.107b)}$$

$$\Delta P \quad \text{静圧の差分 式 (17.104b)}$$

$$\Delta q_{j+1/2} \quad q \text{ の空間差分}$$

$$\Delta q_{j+1/2} \quad q \text{ の空間差分}$$

$$\Delta q^* \quad q^* \text{ の修正値 式 (17.111)}$$

$$\Delta \tilde{q}^* \quad \tilde{q}^* \text{ の修正値 式 (17.115)}$$

$$\Delta q_{j+1/2}^* \quad q^* \text{ の空間差分 式 (17.102)}$$

$$\Delta q_{j+1/2}^* = \Delta \tilde{q}_{j+1/2}^* \quad q^* \text{ の空間差分}$$

$$\delta_{ij} \quad \text{クロネッカー } \delta \text{ 関数}$$

$\epsilon$  比内部エネルギー

$$\epsilon_{ijk} \quad \text{Eddington の } \epsilon \text{ 脚注 2}$$

$\zeta$  渦度

$\kappa$  熱伝導率

$$\Lambda_i \quad \text{固有値 } \lambda_i \text{ の対角行列 式 (17.74a)}$$

$$\hat{\Lambda}_i \quad \text{固有値 } \hat{\lambda}_i \text{ の対角行列 式 (17.82a)}$$

$$\tilde{\Lambda}_i = \hat{\Lambda}_i \quad \text{固有値の行列}$$

$$\lambda_{x_i} = \theta \Delta t / \Delta x_i$$

$$\lambda = \theta \Delta t$$

$\mu$  粘性係数

$$\xi_{i,j} = \partial \xi_i / \partial x_j$$

$\Pi$  粘性応力テンソル

$\rho$  密度

$$\phi^2 = \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2 / 2$$

$$\nabla_{x_i}, \nabla_{\xi_i} \quad x_i \text{ または } \xi_i \text{ 方向の後退差分}$$

$$\Delta_{x_i}, \Delta_{\xi_i} \quad x_i \text{ または } \xi_i \text{ 方向の前進差分}$$