

第18章 圧縮性流れの解法—乱流の計算

前2章では、まず双曲型微分方程式の特性の理論を説明し、1次元オイラー方程式の初期値問題に関して、特性の理論に基づく3つの流束分離法、流束ベクトル分離法、流束差分分離法、有限体積法について詳述した。次に流束差分分離法と有限体積法を多次元ナビエ・ストークス方程式に適用できるように拡張した。本章では更に2つの乱流モデル、Baldwin-Lomaxの代数モデルまたはChienの2方程式モデルを用いる乱流の計算に拡張する。この拡張によって方程式系の式の数と項の数は増えるが、双曲型の性質は保たれるのでこの拡張は直接的に行うことができる。なお筆者らは、乱流への遷移と乱流境界層の発達モデルに頼るが、剥離域や後流内の大きい渦は直接計算する手法が必要な精度を有し実用に供し得るものと考えている。

18.1 圧縮性乱流の基礎方程式

圧縮性流れの基礎方程式は質量、運動量、エネルギーの保存の式で次のように表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (18.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) = \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{f} \quad (18.1b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (18.1c)$$

ただし ρ は密度、 \mathbf{u} は流速、 $e = \rho(\epsilon + \mathbf{u}^2/2)$ は単位体積当たりの岐点内部エネルギー、 p は静圧、 $H = h + \mathbf{u}^2/2 = (e+p)/\rho$ は岐点エンタルピー、 $\mathbf{\Pi}$ は粘性応力テンソル、 \mathbf{q} は熱流束、 \mathbf{f} は外力である。式(18.1)は圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (compressible Navier-Stokes equations) と呼ばれる。

ここで圧縮性流れの数式によく登場する記号について説明する。 T は静温度、 ϵ は比内部エネルギー、 $h = \epsilon + p/\rho$ は比エンタルピーで、完全気体を仮定すれば、 $p = \rho RT$ 、 $d\epsilon = c_v dT$ 、 $dh = c_p dT$ である。 c_v は定積比熱、 c_p は定圧比熱、 γ は比熱比、 R は気体定数で、これらの定数の間には $\gamma = c_p/c_v$ 、 $R = c_p - c_v$ なる関係があり、2つが分かれば他の2つは決まる。 $c = \sqrt{\gamma RT}$ は音速、 $M = |\mathbf{u}|/c$ はマッハ数である。乱流の直接数値シミュレーション (DNS, direct numerical simulation) では、粘性応力テンソル (viscous stress tensor) $\mathbf{\Pi}$ と熱流束 (heat flux) \mathbf{q} の成分は次のようになる。

$$\tau_{ij} = \mu \left(u_{j,i} + u_{i,j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (18.2a)$$

$$q_i = -\kappa T_{,i} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial c^2}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.2b)$$

ただし $u_{j,i} = \partial u_j / \partial x_i$ 、 δ_{ij} はクロネッカー δ 関数、 μ は粘性係数、 κ は熱伝導率、 $Pr = c_p \mu / \kappa$ はプラントル数 (Prandtl number) である。

18.1.1 アンサンブル平均 Navier-Stokes 方程式

乱流の実用解析には，アンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式 (ensemble-averaged Navier-Stokes equations) と乱流モデルの式が用いられる．ナビエ・ストークス方程式は乱流にもそのまま適用できる．アンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式は，ナビエ・ストークス方程式の，流れの変数を平均値と乱れ成分に分け，その方程式のアンサンブル平均を取れば導くことができる．ここでアンサンブル平均の意味について考えよう．定常流れの場合には流れ場内のある点の時間平均値と乱れ成分を定義できる．非定常流れの場合にも同様にある点のある瞬間の平均値と乱れ成分を定義したいのであるが，時間平均は取れないので，これに相当のものとしてアンサンブル平均という用語を用いこの場合の平均を定義しているのである．これは頭の中でのことであるが，例えば飛行機が離陸するとき，翼面上の流れのある点の離陸後ある瞬間の流速のアンサンブル平均値は，同じ離陸を何度も繰返し同じ点同じ瞬間の流速を測定し平均を取れば得られるであろう．アンサンブル平均は定常，非定常を問わず用いられが，定常流れの場合には時間平均と同じものになる．

圧縮性流れの場合には，密度の重みつきアンサンブル平均，すなわちファーヴル平均 (Favre mean) が，流速，温度，単位質量当たりで定義される比内部エネルギー，比エンタルピー，エントロピーなどに対して用いられる．例えば密度の一樣でない気体の定常乱流を考え，ある点から 1 秒ごとに一定体積の気体をサンプリングしその時間平均温度を出せば，それは単なる時間平均温度ではなく密度の重みつき時間平均温度すなわちファーヴル平均温度になる．上記の量はファーヴル平均を取るのが合理的で，このとき式も簡単になる．ここでファーヴル平均とアンサンブル平均の関係について述べる．乱流の流速，温度等の一つを u で表し，それをアンサンブル平均値と乱れ成分に分ければ

$$u = \bar{u} + u'', \quad \overline{u''} = 0 \quad (18.3)$$

ただし \bar{u} はアンサンブル平均，また u'' は乱れ成分でそのアンサンブル平均はゼロである．また u をファーヴル平均値とその乱れ成分に分ければ

$$u = \tilde{u} + u', \quad \tilde{u} = \overline{\rho u} / \bar{\rho}, \quad \overline{u'} = -\overline{\rho'' u''} / \bar{\rho} \quad (18.4)$$

ただし \tilde{u} はファーヴル平均， u' はその乱れ成分でそのアンサンブル平均はゼロにはならない¹．ほかに $\overline{\rho u''} = \overline{\rho'' u''}$ ， $\overline{\rho u'} = 0$ ， $\tilde{u} - \bar{u} = \overline{\rho'' u''} / \bar{\rho}$ ， $\overline{\rho \tilde{u}} = \overline{\rho u} = \overline{\rho \bar{u}} + \overline{\rho'' u''}$ のような関係式が成立する²．

ナビエ・ストークス方程式 (18.1) のアンサンブル平均を取れば次式が得られる．

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{u}} = 0, \quad (18.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho \mathbf{u}} + \nabla \cdot (\overline{\rho \mathbf{u} \mathbf{u}} + \bar{p}) = \nabla \cdot \overline{\mathbf{\Pi}} + \mathbf{f}, \quad (18.5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho E} + \nabla \cdot (\overline{\rho E + p} \mathbf{u}) = \nabla \cdot \overline{\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u}} - \nabla \cdot \overline{\mathbf{q}} + \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (18.5c)$$

¹ $u' = u - \tilde{u} = u - \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}} \{ \bar{\rho} (\bar{u} + u'') - (\bar{\rho} + \rho'') (\bar{u} + u'') \} = \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\rho} u'' - \rho'' u'') = u'' - \frac{\rho'' u''}{\bar{\rho}}$
これよりファーヴル平均の乱れのアンサンブル平均が得られる．なお $\overline{\bar{a}} = \bar{a}$ ， $\overline{\bar{a} b} = \bar{a} \bar{b}$ ， $\overline{\tilde{a} b} = \tilde{a} \bar{b}$ ， $\overline{\tilde{a} \tilde{b}} = \tilde{a} \tilde{b}$ ．

² $\overline{\rho \tilde{u}} = (\bar{\rho} + \rho'') \frac{\overline{\rho \tilde{u}}}{\bar{\rho}} = \overline{\rho u} + \frac{\rho'' u''}{\bar{\rho}} = \overline{\rho u}$

これらの式の中のアンサンブル平均をファール平均に書き替える .

$$\begin{aligned}\overline{\rho \mathbf{u}} &= \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}, \\ \overline{\rho \mathbf{u} \mathbf{u}} &= \overline{\rho (\tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + 2\tilde{\mathbf{u}} \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \mathbf{u}')} = \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}, \\ \overline{\rho E} &= \overline{\rho (\epsilon + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2)} = \bar{\rho} \tilde{\epsilon} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}, \\ \overline{(\rho E + p) \mathbf{u}} &= \overline{\rho (h + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2) \mathbf{u}} = \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho} \widetilde{h' \mathbf{u}'} + \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \mathbf{u}'}\end{aligned}$$

これらの関係を用いれば , 次のアンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式 (ensemble-averaged Navier-Stokes equations) が導出できる .

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (18.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\mathbf{u}} + \bar{p}) = \nabla \cdot (\tilde{\Pi} - \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) + \mathbf{f} \quad (18.6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{E} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}} + \bar{p}) \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \cdot ((\tilde{\Pi} - \bar{\rho} \widetilde{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \bar{q} - \bar{\rho} \widetilde{h' \mathbf{u}'}) + \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (18.6c)$$

なお上式の導出に際しては 3 重相関項 $\overline{\rho \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \mathbf{u}' / 2}$ は省略された³.

ところで乱流の計算では , アンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式 (18.5) ないし (18.6) を用いず通常のナビエ・ストークス方程式 (18.1) を用い , その拡散項すなわち応力テンソルの成分 τ_{ij} と熱流束の成分 q_i を

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \mu (u_{j,i} + u_{i,j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k}) - \overline{\rho u'_i u'_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ q_i &= -\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} c^2_{,i} + \overline{\rho h' u'_i} \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}$$

のように置くことが多い . ただし $-\overline{\rho u'_i u'_j} = -\bar{\rho} \widetilde{u'_i u'_j}$ はレイノルズ応力 (Reynolds stress) , $\overline{\rho h' u'_i} = \bar{\rho} \widetilde{h' u'_i}$ は乱流熱流束 (turbulent heat flux) の成分で , 共に乱流の乱れによる拡散項である . 薄剪断層の層流域では右辺第 1 項の分子拡散のみが働き , 乱流域では第 2 項の乱流拡散が支配的である . 次にアンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式ではなく通常のナビエ・ストークス方程式をそのまま用いることの意味について説明する .

もとのナビエ・ストークス方程式 (18.1) は , τ_{ij} と q_i を上式のように置き , 更に

$$\rho \Rightarrow \bar{\rho}, \quad \mathbf{u} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}, \quad e \Rightarrow \bar{\rho} \tilde{E}, \quad p \Rightarrow \bar{p}, \quad H \Rightarrow \tilde{E} + \bar{p} / \bar{\rho}$$

と置けば , ファール平均を用いたアンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式 (18.6) になる . 乱流モデルを用いる圧縮性乱流の計算では , 表面的には通常のナビエ・ストークス方程式を解いているように見えるが , 実はアンサンブル平均ナビエ・ストークス方程式を解いているということである . したがって乱流の計算における式 (18.1) の例えば e は , 単位体積当たりの岐点内部エネルギーではなく

$$e \Rightarrow \bar{\rho} \tilde{E} = \bar{\rho} (\tilde{\epsilon} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}')$$

³ 乱流では平均流に対して乱れ成分は必ずしも小さくなくこの項は無視できないのであるが , そのモデル化はことを煩雑にするので , 拡散を表す項はレイノルズ応力項に代表させこの項を省略したということである . なおこれに関しては筆者の誤解があるやも .

$$\bar{\rho} h = \bar{\rho} (\tilde{\epsilon} + \bar{p} / \bar{\rho}), \quad \bar{\rho} \tilde{p} / \bar{\rho} = \bar{\rho} (\overline{\rho \tilde{p} / \bar{\rho}} / \bar{\rho}) = \bar{p}$$

ということになる．上記のように記号を対応づけた場合に，アンサンブル平均した状態方程式は

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\tilde{T}, \quad d\tilde{\epsilon} = c_v d\tilde{T}, \quad d\tilde{h} = c_p d\tilde{T} \quad (18.7a)$$

また熱力学的状態量の関係式等は

$$\bar{p} = \tilde{\gamma}\bar{\rho}\tilde{\epsilon} = \tilde{\gamma}\bar{\rho}\tilde{E} - \bar{\rho}\tilde{\phi}^2 \quad (18.7b)$$

$$\tilde{H} = \tilde{E} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = \tilde{\gamma}\tilde{E} - \tilde{\phi}^2 = \frac{1}{\tilde{\gamma}}(\tilde{c}^2 + \tilde{\phi}^2) \quad (18.7c)$$

のようになり，形式的に通常のものと同じになる．ただし

$$\tilde{\gamma} = \gamma - 1, \quad \tilde{\phi}^2 = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \tilde{\mathbf{u}}'), \quad \tilde{c}^2 = \gamma R\tilde{T}, \quad \tilde{c} = \sqrt{\tilde{c}^2}$$

これから先は平均を表す‘ $\bar{\quad}$ ’と‘ $\tilde{\quad}$ ’は省略することにする．

18.1.2 座標成分で書かれた圧縮性 Navier-Stokes 方程式

圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (18.1) はデカルト座標系 (cartesian coordinates) \mathbf{x} では次のようになる．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + D + g = 0 \quad (18.8a)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} p \\ \rho H u_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.8b)$$

$$D = -\frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ \tau_{ij} u_j - q_i \end{pmatrix}, \quad g = -\begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_i u_i \end{pmatrix}$$

ただし 上式の q は未知変数， F_i は流束， D は拡散項， g は外力項である．

次に一般曲線座標系 (general curvilinear coordinates) ξ の場合を考える．式 (18.1) にヤコビアン J を乗じ， $J\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial \xi_i} J(\nabla\xi_i)\phi$ なる関係を用い，反変速度 $U_i = \mathbf{u} \cdot \nabla\xi_i$ を導入すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho \mathbf{u} U_i + \nabla \xi_i p \\ \rho H U_i \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (J \nabla \xi_i) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{u} - q \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

これより次の一般曲線座標系の圧縮性ナビエ・ストークス方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \hat{D} + \hat{g} = 0 \quad (18.9a)$$

$$\hat{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho u_2 U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho u_3 U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.9b)$$

$$\hat{D} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} J \xi_{i,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{j1} \\ \tau_{j2} \\ \tau_{j3} \\ \tau_{jk} u_k - q_j \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = -J \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_k u_k \end{pmatrix}$$

ただし \hat{q} は未知変数, \hat{F}_i は流束, \hat{D} は拡散項, \hat{g} は外力項である⁴。また $J = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi_{i,j} = \partial \xi_i / \partial x_j$ は変換のヤコビアンと測度である。式 (18.9) は, 式 (18.8) の x の微分を ξ の微分に変え, 曲線座標格子を用いる数値計算に適するようにしたものである。

ここで式 (18.9) の意味について少々説明する。数値解析では, 物理空間内の曲線座標格子 (curvilinear coordinate grid) は通常 格子間隔 1 の立方体格子に写像され, 写像空間内の格子セルに対して差分法または有限体積法による計算が行われる。まずヤコビアン J の意味を考えよう。図 18.1 を参照すれば,

$$J = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \approx (\mathbf{x}_{100} - \mathbf{x}_{000}) \cdot (\mathbf{x}_{010} - \mathbf{x}_{000}) \times (\mathbf{x}_{001} - \mathbf{x}_{000})$$

したがって J は ξ 空間内の単位立方体要素の x 空間における体積, すなわち物理空間の局所体積: 写像空間の相当体積の比を表している。なおここでは $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z; \xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \zeta$ としている。次に p にかかる係数, 例えば $J \nabla \xi$ の意味を考えよう。下図を参照すれば,

$$J \nabla \xi = \begin{pmatrix} J \xi_x & J \xi_y & J \xi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} y_\eta & y_\zeta \\ z_\eta & z_\zeta \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} z_\eta & z_\zeta \\ x_\eta & x_\zeta \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} x_\eta & x_\zeta \\ y_\eta & y_\zeta \end{matrix} \right| \end{pmatrix} \approx (\mathbf{x}_{010} - \mathbf{x}_{000}) \times (\mathbf{x}_{001} - \mathbf{x}_{000})$$

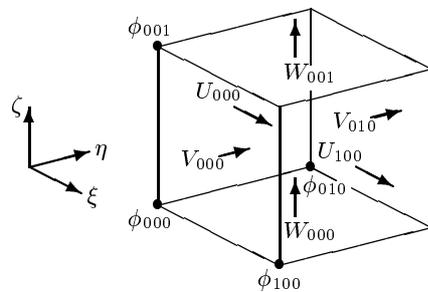


図 18.1: ξ 空間内の単位立方体格子

⁴デカルト座標系から一般曲線座標系への変換に関して不明の点は 17.2.2 項を参照ください。

$J\nabla\xi$ は、 ξ 空間内の単位立方体要素の $\xi = \text{const.}$ 面に相当する x 空間内の面の面積ベクトルである。つまりその大きさは物理空間の $\xi = \text{const.}$ 面上の局所面積：写像空間の相当面積の比を表している。

式 (18.9) は ξ 空間の単位立方体要素の流れに対して解釈すれば次のようになる。その密度、物理空間の運動量、単位体積当たりの岐点内部エネルギーは物理空間のものにヤコビアン J を乗じたものになり、それらの流束は反変速度 U で要素へ流入または流出する。なお反変速度は ξ 空間内の流れの速度である。また要素境界 $\xi_i = \text{const.}$ に作用する圧力、粘性応力、この面を通る熱流束は物理空間のものに $J|\nabla\xi_i|$ を乗じたものになる。 x 空間と ξ 空間の対応する 2 つの要素に関して、要素内の流れの質量、岐点内部エネルギー、物体力は同じになる。また対応する境界面に作用する力の成分と通過する熱量も同じになる。

次に ξ 空間の流れの運動方程式を作る。反変速度成分 U_i は流速 \mathbf{u} に $\nabla\xi_i \cdot$ を乗じたものであるから、この運動方程式は式 (18.1b) に $J\nabla\xi_i \cdot$ を乗じることによって導かれる。なおその導出過程では

$$J\nabla\xi_i \cdot \rho \mathbf{u} = J\rho U_i,$$

$$J\nabla\xi_i \cdot (\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) = \nabla\xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial\xi_i} J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla\xi_i p) = \frac{\partial}{\partial\xi_i} J(\rho U_i U_i + g^{i1} p) - J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla\xi_i p) \cdot \frac{\partial}{\partial\xi_i} \nabla\xi_i$$

のような計算が行われる。上記の質量とエネルギーの式にこの運動方程式を加えた写像空間の流れのナビエ・ストークス方程式は次のようになる。

$$B \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \hat{D} + \hat{g} \right) = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \xi_i} + \tilde{R} + \tilde{D} + \tilde{g} = 0 \quad (18.10a)$$

$$\tilde{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ e \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho U_1 U_i + g^{i1} p \\ \rho U_2 U_i + g^{i2} p \\ \rho U_3 U_i + g^{i3} p \\ \rho H U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{R} = -J(\rho U_i \mathbf{u} + \nabla\xi_i p) \cdot \frac{\partial}{\partial\xi_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla\xi_1 \\ \nabla\xi_2 \\ \nabla\xi_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (18.10b)$$

$$\tilde{D} = -J \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \tau_{ik} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_{1,i0} \\ \xi_{2,i0} \\ \xi_{3,i0} \\ u_i \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial \xi_i} J g_{ijk} \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = -J \rho \mathbf{f} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla\xi_1 \\ \nabla\xi_2 \\ \nabla\xi_3 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} & 0 \\ 0 & \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} & 0 \\ 0 & \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.10c)$$

ただし式 (18.10b) の \tilde{q} は未知変数, \tilde{F}_i は流束, \tilde{R} は付加項, \tilde{D} は拡散項, \tilde{g} は外力項で, 式 (18.10c) の B は流速 u を反変速度 U に変換する行列である. また $g^{ij} = \xi_{i,k} \xi_{j,k}$ は反変測度テンソルの成分で, 添字 0 の付いている量は微分しないものとする. $\partial(a_0 b)/\partial \xi = a_0 \partial b/\partial \xi$.

式 (18.10) の運動方程式は質量流束 (mass flux) $J\rho U$ の運動方程式である. この質量流束の ξ_i 成分 $J\rho U_i$ は ξ 空間の単位立方体格子を x 空間に写像した格子セルの $\xi_i = \text{const.}$ 面を通る質量流量である. この運動方程式の 3 成分の式は, 式 (18.9) の保存形運動方程式の 3 成分の線形結合を取ったものであるが非保存形である. 式 (18.10) は, 対流項を保存形に書換えたもので, そのために付加項 \tilde{R} が生じている. この付加項は無視できないがその値は滑らかな格子では小さい.

18.1.3 乱流モデル — Baldwin-Lomax の代数モデルと Chien の 2 方程式モデル

乱流モデルの選び方とその適用限界については第 10 章を参照されたい. Baldwin-Lomax モデルは, 代数モデルのひとつで, この種のモデルでは乱流を特徴づける変数, このモデルでは混合長 l が, その断面内の状態 (流速プロファイル, 圧力勾配, 壁面曲率など) だけから決まる. これに対し Chien モデルは低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルのひとつで, この種のモデルでは乱流を特徴づける乱れの変数, 運動エネルギー k と散逸率 ε の輸送方程式が解かれ, 代数モデルとは異なり上流側の影響が直接計算結果に反映される. しかしながら渦粘性近似を置いているため, レイノルズ応力の 1 つの成分が卓越している単純な流れには良いが, 複雑乱流には不十分である. このような流れには代数応力モデルなどのより高度のモデルを選ばなければならない. 低レイノルズ数型モデルは壁面近傍の低レイノルズ数域にも適用でき, 壁法則を補う必要のないモデルである. ここには, Baldwin-Lomax (1978) の代数モデルと Chien (1982) の 2 方程式モデルを示すことにする.

これらの渦粘性型モデルでは応力テンソル Π と熱流束 q の成分は次のように置かれる.

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(u_{j,i} + u_{i,j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (18.11a)$$

$$q_i = -\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\mu}{P_r} + \frac{\mu_t}{P_{rt}} \right) \frac{\partial c^2}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.11b)$$

ただし, μ_t は渦粘性係数 (eddy viscosity), $k = u'_i u'_i / 2$ は単位質量当たりの乱れの運動エネルギー (turbulent kinetic energy), また P_{rt} は乱流プラントル数 (turbulent Prandtl number) で, 空気に対しては $P_r = 0.72$, $P_{rt} = 0.9$ (境界層), $= 0.5$ (自由剪断流) である.

式 (18.11a) と (18.11b) は, それぞれ層流の場合の式 (18.2a) または (18.2b) に同形の乱流の項を加えたもので, 層流のところでは $\mu_t = 0$ で乱流項の寄与はゼロになる. 式 (18.11a) のレイノルズ応力 (Reynolds stress) 項は, レイノルズ応力の非等方テンソル成分が平均歪み速度の非等方テンソル成分に比例するものとしてそれらの成分に渦粘性係数 μ_t を乗じたもので, 速度勾配拡散の式である. また式 (18.11b) の乱流熱流束 (turbulent heat flux) 項は, 平均温度勾配 $-\partial T/\partial x_i$ に渦熱伝導率 (thermal eddy viscosity) $\kappa_t = c_p \mu_t / P_{rt}$ を乗じたもので温度勾配拡散の式である. これらの勾配拡散モデルでは, すべてが拡散係数 μ_t のモデル化にかかっている. そのモデル化は発達段階の乱流境界層や 2 次元ジェット流のようにレイノルズ応力の 1 つの成分が卓越している場合には各種の効果を含めて可能であるが, これらの薄剪断層内に横流や大きい縦渦のある場合には難しくなる.

Baldwin-Lomax モデルは 2 層代数渦粘性モデルで、渦粘性係数は次のように置かれる．

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{\text{inner}} & (d \leq d_{\text{crossover}}) \\ (\mu_t)_{\text{outer}} & (d > d_{\text{crossover}}) \end{cases} \quad (18.12a)$$

ただし d は壁面からの距離， $d_{\text{crossover}}$ は $(\mu_t)_{\text{inner}} = (\mu_t)_{\text{outer}}$ になるところの d である．内層には Prandtl-van Driest の式が用いられる．

$$(\mu_t)_{\text{inner}} = \rho l^2 |\zeta| \quad (18.12b)$$

ただし $l = \kappa d \{1 - \exp(-y^+/A^+)\}$ は混合長， $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度である． $\kappa = 0.4$ は Kármán 定数， $A^+ = 26$ ， $y^+ = u_\tau d / \nu_w = \sqrt{\rho_w \tau_w} d / \mu_w$ は壁面からの無次元距離， $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w}$ は摩擦速度， τ_w は壁面剪断応力である．他方 外層には Clauser の式の代わりに次式が用いられる．

$$(\mu_t)_{\text{outer}} = 1.6 K \rho F_{\text{wake}} F_{\text{Kleb}}(d) \quad (18.12c)$$

ただし $K = 0.0168$ は Clauser 定数である．また

$$F_{\text{wake}} = \min(d_{\text{max}} F_{\text{max}}, 0.25 d_{\text{max}} u_{\text{dif}}^2 / F_{\text{max}})$$

$$F_{\text{Kleb}}(d) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{0.3d}{d_{\text{max}}} \right)^6 \right]^{-1}$$

d_{max} は $F(d) = d |\zeta| \{1 - \exp(-y^+/A^+)\}$ が薄剪断層を横断して最大値 F_{max} になるところの d である．ただし後流では $\exp(-y^+/A^+) = 0$ とする．また $u_{\text{dif}} = |\mathbf{u}|_{\text{max}} - |\mathbf{u}|_{\text{min}}$ は薄剪断層を横断しての流速の大きさの差で，境界層では $|\mathbf{u}|_{\text{min}} = 0$ とする． F_{Kleb} は Klebanoff の間歇係数である．遷移については，薄剪断層を横断して

$$(\mu_t)_{\text{max}} < 14 \mu_\infty \quad (18.13)$$

ならば，その位置では薄剪断層内の流れは層流で薄剪断層を横断して $\mu_t = 0$ とする．

Baldwin-Lomax モデルを用いる場合には，前章に述べた解法をほとんどそのまま使用できる．ただし境界に沿って $(\mu_t)_{\text{max}}$ を計算し条件 (18.13) から遷移点を求めることが必要になる．またその下流域では境界付近の流れが乱流になるので，ナビエ・ストークス方程式の拡散項は渦粘性近似の式 (18.11) と Baldwin-Lomax モデルの式 (18.12) を用い計算される．

Chien モデルは低レイノルズ数型 $k - \varepsilon$ モデルで，このモデルはもともと $y = \text{const.}$ 壁面に沿う非圧縮性流れに対して開発されたものであるが，Chien モデルでは一般曲線座標系の圧縮性流れに適用できるよう次のように書換えられている．

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (18.14a)$$

乱れの運動エネルギー k とその散逸率 ε は次の輸送方程式を解くことによって求められる．

$$\frac{\partial \hat{q}_t}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_{ti}}{\partial \xi_i} + \hat{D}_t + \hat{g}_t = 0 \quad (18.14b)$$

ただし

$$\begin{aligned} \hat{q}_t &= J\rho \begin{pmatrix} k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_{ti} = J\rho U_i \begin{pmatrix} k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_t = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} Jg^{ij} \begin{pmatrix} (\mu + \mu_t) \frac{\partial k}{\partial \xi_j} \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_j} \end{pmatrix}, \\ \hat{g}_t &= -J \begin{pmatrix} P - \rho\varepsilon - \rho D \\ \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P - c_2 f \rho\varepsilon - f_3 \rho D) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18.14c)$$

$P = -\overline{\rho u_i' u_j'} \partial u_i / \partial x_j$ は乱れの発生項, $-\overline{\rho u_i' u_j'}$ はレイノルズ応力, $D = 2\nu k/d^2$ は壁面におけるエネルギー散逸率, d は壁面からの距離である. またモデル定数とモデル関数は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} c_\mu &= 0.09, \quad c_1 = 1.35, \quad c_2 = 1.8, \quad \sigma = 1.3 \\ f_\mu &= 1 - e^{-c_3 y^+}, \quad f = 1 - \frac{0.4}{1.8} e^{-(Re_t/6)^2}, \quad f_3 = e^{-c_4 y^+} \\ c_3 &= 0.0115, \quad c_4 = 0.5, \quad Re_t = k^2/\nu\varepsilon \end{aligned}$$

Re_t は乱流レイノルズ数である.

このモデルは壁近傍の低レイノルズ数流れにまで適用できるが, 壁面の隣接格子点は粘性底層内の $y^+ \equiv du_\tau/\nu = 1 \sim 4$ に取らなければならない, 壁面近くに細かい格子が要求されることになる. 実際問題として壁面近くの格子は特別の注意を払わなければ非常に細長いものになり, このことが壁面に直立する衝撃波の捕獲に悪影響を及ぼすようである. また通常上流境界に k と ε の小さい初期値が適宜与えられる. この主流の乱れは境界層内の流れに外乱となって作用しその流れを不安定にしバイパス遷移を惹き起す. なお上流境界に k と ε の初期値を与えることは必要なことで, プログラムにこのモデルを組み込んだだけでは流れの全域が $k = \varepsilon = 0$ になり乱流の計算にはならない.

$k - \varepsilon$ モデルは, 良く検証され信頼性の高いモデルであるが, k は乱れの特性速度 q の 2 乗, ε は q の 3 乗に比例する量で, 流れが大きく乱れるところではこれらの量は極端に大きくなり, 計算が不安定になるという難点を抱えている. 安定化のためには,

- 層流として計算を始める
- k 方程式の発生項 P の大きさを散逸項と対比しながら抑える
- k と ε の輸送方程式をナビエ・ストークス方程式と同時に解く

などの対策を講じることが必要である. なお計算格子を細かくすることは k と ε の最大値を更に大きくし問題解決にはならない. 上記の第 3 の対策のためには, ナビエ・ストークス方程式に k と ε の輸送方程式が加わった場合の流束差分分離法, 有限体積法, 近似因子法の諸式を導出することが必要となる.

18.2 線形化と対角化

以下には低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルを用いるアンサンブル平均圧縮性ナビエ・ストークス方程式の解法について述べる．レイノルズ応力輸送方程式モデルなど，他の輸送方程式モデルを用いる場合については省略するが，これらの場合も同様の解法で解を求めることができる．以下本章には k と ε の方程式が加わった場合に，前章に述べた圧縮性ナビエ・ストークス方程式の2つの解法，流束差分分離法と有限体積法，それから計算効率を上げる方法がどのようになるのかについて一通り説明する．本節には2つの解法の説明に入る前の下準備として，1次元オイラー方程式に k と ε の方程式が加わった場合の線形化 (linearization)，非保存形化，対角化 (diagonalization) について説明する．

18.2.1 デカルト座標系の方程式

前章で線形化・対角化の対象として用いられたオイラー方程式はナビエ・ストークス方程式から拡散項と外力項を除外したものであったが，これに加えられるべき相当の k と ε の方程式は前出の k と ε の輸送方程式 (18.14) から拡散，発生，散逸の項を除外した輸送項のみの方程式である．これらの方程式は纏めて書けば次のようになる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (18.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) = 0 \quad (18.15b)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho H \mathbf{u} = 0 \quad (18.15c)$$

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho k \mathbf{u} = 0 \quad (18.15d)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \varepsilon \mathbf{u} = 0 \quad (18.15e)$$

なおこれらの方程式系は双曲型の性質を保持している．この方程式系から1つの空間次元の部分のみを取り出せば次式が得られる．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.16a)$$

ただし添字 i は1または2または3で，ここではアインシュタイン総和規約には従わないものとする．未知変数ベクトル q と流束 F_i は次のようになる．

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} p \\ \rho H u_i \\ \rho k u_i \\ \rho \varepsilon u_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.16b)$$

最後の2行が乱流モデルのものである．

流束 F_i は q の成分の 1 次の同次式であるから , オイラーの同次関係を用いれば

$$dF_i = \frac{\partial F_i}{\partial q} dq = A_i dq, \quad (18.17)$$

$$F_i = A_i q, \quad dA_i q = 0$$

となり , 式 (18.16) は次のように線形化することができる .

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A_i \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.18a)$$

ただし ヤコビ行列 $A_i = \partial F_i / \partial q$ は次のように与えられる⁵ .

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 u_i + \delta_{i1} \phi^2 & D_{i1} & \delta_{i2} u_1 - \delta_{i1} \tilde{\gamma} u_2 & \delta_{i3} u_1 - \delta_{i1} \tilde{\gamma} u_3 & \delta_{i1} \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ -u_2 u_i + \delta_{i2} \phi^2 & \delta_{i1} u_2 - \delta_{i2} \tilde{\gamma} u_1 & D_{i2} & \delta_{i3} u_2 - \delta_{i2} \tilde{\gamma} u_3 & \delta_{i2} \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ -u_3 u_i + \delta_{i3} \phi^2 & \delta_{i1} u_3 - \delta_{i3} \tilde{\gamma} u_1 & \delta_{i2} u_3 - \delta_{i3} \tilde{\gamma} u_2 & D_{i3} & \delta_{i3} \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ -H u_i + \phi^2 u_i & \delta_{i1} H - \tilde{\gamma} u_1 u_i & \delta_{i2} H - \tilde{\gamma} u_2 u_i & \delta_{i3} H - \tilde{\gamma} u_3 u_i & \gamma u_i & 0 & 0 \\ -k u_i & \delta_{i1} k & \delta_{i2} k & \delta_{i3} k & 0 & u_i & 0 \\ -\varepsilon u_i & \delta_{i1} \varepsilon & \delta_{i2} \varepsilon & \delta_{i3} \varepsilon & 0 & 0 & u_i \end{pmatrix} \quad (18.18b)$$

$$D_{ij} = u_i + \delta_{ij}(1 - \tilde{\gamma})u_j$$

$\tilde{\gamma} = \gamma - 1$, $\phi^2 = \tilde{\gamma} u^2 / 2$ である . なお次の関係がある .

$$H = \frac{e+p}{\rho} = \frac{c^2 + \phi^2}{\tilde{\gamma}} = \frac{\gamma e}{\rho} - \phi^2,$$

このヤコビ行列 A_i は簡単とは言えない . もちろんこれを直接対角化することもできるが , ここでは非保存形方程式のものが簡単になることに着目しこれを利用して対角化を行う . 式 (18.15) に対応する非保存形方程式は次のようになる .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (18.19a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (18.19b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (18.19c)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k = 0 \quad (18.19d)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon = 0 \quad (18.19e)$$

この方程式系は 1 階の準線形微分方程式で , 1 つの空間次元の式はベクトル形で次のように書くことができる .

$$\frac{\partial q^*}{\partial t} + A_i^* \frac{\partial q^*}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.20a)$$

⁵ A の要素は , まず F の成分の式を q の成分で表し , それから q の成分で偏微分すれば容易に求めることができる .

ただし

$$q^* = \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \\ k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad A_i^* = \begin{pmatrix} u_i & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_i & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i & 0 & \delta_{i2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i & \delta_{i3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & u_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i \end{pmatrix} \quad (18.20b)$$

式 (18.20) は

$$dq^* = \frac{\partial q^*}{\partial q} dq = N dq \quad (18.21)$$

であるから，式 (18.18) の左から N を演算したものである．なお

$$A_i^* = N A_i N^{-1}$$

であるが， q^* は q の成分の 1 次の同次式ではないから，上記のように $q^* = Nq$ と $dNq = 0$ は成立しない．保存形方程式を非保存形に変換する行列 $N = \partial q^*/\partial q$ とその逆行列 N^{-1} は次のようになる⁶．

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\gamma} \mathbf{u}^2/2 & -\tilde{\gamma} u_1 & -\tilde{\gamma} u_2 & -\tilde{\gamma} u_3 & \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ -k/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ -\varepsilon/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (18.22a)$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u}^2/2 & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & 1/\tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (18.22b)$$

2つの行列 A_i と A_i^* を比較すれば， A_i^* が単純であることは一目瞭然である．ここではまず A_i^* を対角化し， A_i の対角化は次式によって行う．

$$A_i = N^{-1} A_i^* N = N^{-1} R_i^* A_i L_i^* N = R_i A_i L_i \quad (18.23)$$

⁶ N の要素は，まず q^* の成分の式を q の成分で表し，それから q の成分で偏微分すれば容易に求めることができる．

A_i は行列 A_i^* の固有値 λ_{ik} からなる対角行列, L_i^* は A_i^* の左固有ベクトル l_{ik} からなる行列, $R_i^* = L_i^{*-1}$ は右固有ベクトル r_{ik} からなる行列である. ここでは次に A_i^* の固有値 λ_{ik} と左固有ベクトル l_{ik}^* の求め方について簡単に説明する (固有値, 固有ベクトルに関してはは前章参照). 固有値 λ_{ik} は λ_i の 7 次代数方程式

$$|A_i^* - \lambda_i I| = \begin{vmatrix} u_i - \lambda & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_i - \lambda_i & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i - \lambda_i & 0 & \delta_{i2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i - \lambda_i & \delta_{i3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & u_i - \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

の根で, $\lambda_{i1} = u_i$ (5 重根), $\lambda_{i2} = u_i + c$, $\lambda_{i3} = u_i - c$ となる. 左固有ベクトル l_{ik}^* を求める式は固有値 $\lambda_i = u_i$ に対しては

$$l_i^*(A_i^* - \lambda_i I) = (l_{ik}^{*1} \ l_{ik}^{*2} \ \dots \ l_{ik}^{*7}) \begin{pmatrix} 0 & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

固有値 $\lambda_i = u_i \pm c$ に対しては

$$l_i^*(A_i^* - \lambda_i I) = (l_{ik}^{*1} \ l_{ik}^{*2} \ \dots \ l_{ik}^{*7}) \begin{pmatrix} \mp c & \delta_{i1}\rho & \delta_{i2}\rho & \delta_{i3}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp c & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp c & 0 & \delta_{i2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp c & \delta_{i3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c^2 & \delta_{i2}\rho c^2 & \delta_{i3}\rho c^2 & \mp c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mp c \end{pmatrix} = 0$$

となる. これらの式から 1 次独立の 7 個の左固有ベクトルを求めることができる.

対角行列 A_i の固有値と行列 L_i^* の固有ベクトルの順番はある任意性を持つが, ここではこの対角化によって得られる常微分方程式の係が, 上から流速 u_i で伝播するエントロピー波, 3 つの, 速度 $u_i + c$ で伝播する圧力波または流速 u_i で伝播する剪断波, 速度 $u_i - c$ で伝播する圧力波, 流速 u_i で伝播する k の波, 流速 u_i で伝播する ε の波の式になるように並べている. 固有値と固有ベクトルは対応するところに配さなければならない. このとき L_i^* の対角要素は 0 でないある大きさを持つ. 右固有ベクトルの行列 R_i^* は, A_i と L_i^* の任意性のため L_i^* の逆行列として求められる. 行列 A_i の固有値も A_i である. 固有値は波の速度を表すので, 同一物理現象ではそれを記述する数式によらず同じになる. A_i の左固有ベクトルは $L_i = L_i^* N$, 右固

有ベクトルは $R_i = N^{-1}R_i^*$ で、これらの行列は次のように表される。

$$A_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_i + \delta_{i1}c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i + \delta_{i2}c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i + \delta_{i3}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_i - c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_i \end{pmatrix} \quad (18.24a)$$

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta_{i1}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \delta_{i2}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta_{i3}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} & -1/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N \quad (18.24b)$$

$$R_i = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \delta_{i1}\rho/2c & \delta_{i2}\rho/2c & \delta_{i3}\rho/2c & -\rho/2c & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_{i1}/2 & 0 & 0 & \delta_{i1}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_{i2}/2 & 0 & \delta_{i2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \delta_{i3}/2 & \delta_{i3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{i1}\rho c/2 & \delta_{i2}\rho c/2 & \delta_{i3}\rho c/2 & -\rho c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.24c)$$

非保存形の式 (18.20) と等価な常微分方程式系は、この式の左から左固有ベクトル L_i^* を乗じることによって得られるが、これは保存形の式 (18.16) の左から左固有ベクトル L_i を乗じたものでもある。

$$L_i \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = L_i^* \frac{\partial q^*}{\partial t} + A_i L_i^* \frac{\partial q^*}{\partial x_i} = 0 \quad (18.25)$$

この常微分方程式系は具体的に書けば次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \rho - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) p = 0, \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i + \delta_{ij}c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} u_j + \frac{\delta_{ij}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i + c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} p = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i - c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} u_i - \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_i - c) \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} p = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) k = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (18.26)$$

これらの式は特性曲線 $dx_i/dt = u_i$, $dx_i/dt = u_i + c$, $dx_i/dt = u_i - c$ に沿う内微分 $\partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$, $\partial/\partial t + (u_i + c) \partial/\partial x_i$ または $\partial/\partial t + (u_i - c) \partial/\partial x_i$ のいずれか 1 つを含むので常微分方程式で、上から $dx_i/dt = u_i$ に沿って伝播するエントロピー波、 $dx_i/dt = u_i$ に沿う剪断波または $dx_i/dt = u_i + c$ に沿う圧力波、 $dx_i/dt = u_i - c$ に沿う圧力波、 $dx_i/dt = u_i$ に沿う乱れの量 k と ε の波を表している。

18.2.2 一般曲線座標系の方程式

一般曲線座標系のオイラー方程式とこれに加えられる k と ε の輸送方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} J\rho + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J\rho U_i = 0 \quad (18.27a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J\rho \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J(\rho \mathbf{u} U_i + \nabla \xi_i p) = 0 \quad (18.27b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J e + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho H U_i = 0 \quad (18.27c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J \rho k + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho k U_i = 0 \quad (18.27d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho \varepsilon U_i = 0 \quad (18.27e)$$

この方程式系から 1 つの空間次元の部分のみを取り出せば次式が得られる。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.28a)$$

ただし

$$\hat{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho u_2 U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho u_3 U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \\ \rho k U_i \\ \rho \varepsilon U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.28b)$$

流束 \hat{F}_i は \hat{q} の成分だけでなく測度 $\xi_{i,j}$ の関数であるが、時空間内の固定された点を考えれば、 \hat{F}_i は \hat{q} の成分だけの 1 次の同次式で Euler の同次関係を用いれば

$$d\hat{F}_i = \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \hat{q}} d\hat{q} = \hat{A}_i d\hat{q}, \quad \hat{F}_i = \hat{A}_i \hat{q}, \quad d\hat{A}_i \hat{q} = 0 \quad (18.29)$$

となり、式 (18.28) は次のよう線形化できる。

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \hat{A}_i \frac{\partial \hat{q}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.30a)$$

ただしヤコビ行列 $\hat{A}_i = \partial \hat{F}_i / \partial \hat{q}$ は次のように与えられる。

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 U_i + \xi_{i,1} \phi^2 & \hat{D}_1 & \xi_{i,2} u_1 - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} u_2 & \xi_{i,3} u_1 - \tilde{\gamma} \xi_{i,1} u_3 & \tilde{\gamma} \xi_{i,1} & 0 & 0 \\ -u_2 U_i + \xi_{i,2} \phi^2 & \xi_{i,1} u_2 - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} u_1 & \hat{D}_2 & \xi_{i,3} u_2 - \tilde{\gamma} \xi_{i,2} u_3 & \tilde{\gamma} \xi_{i,2} & 0 & 0 \\ -u_3 U_i + \xi_{i,3} \phi^2 & \xi_{i,1} u_3 - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} u_1 & \xi_{i,2} u_3 - \tilde{\gamma} \xi_{i,3} u_2 & \hat{D}_3 & \tilde{\gamma} \xi_{i,3} & 0 & 0 \\ -H U_i + \phi^2 U_i & \xi_{i,1} H - \tilde{\gamma} U_i u_1 & \xi_{i,2} H - \tilde{\gamma} U_i u_2 & \xi_{i,3} H - \tilde{\gamma} U_i u_3 & \gamma U_i & 0 & 0 \\ -k U_i & \xi_{i,1} k & \xi_{i,2} k & \xi_{i,3} k & 0 & U_i & 0 \\ -\varepsilon U_i & \xi_{i,1} \varepsilon & \xi_{i,2} \varepsilon & \xi_{i,3} \varepsilon & 0 & 0 & U_i \end{pmatrix} \quad (18.30b)$$

$\hat{D}_j = U_i + (1 - \tilde{\gamma})\xi_{i,j}u_j$, $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$, $\phi^2 = \tilde{\gamma}\mathbf{u}^2/2$, $\xi_{i,j} = \partial\xi_i/\partial x_j$ である .

デカルト座標系の非保存形方程式 (18.19) は, $\mathbf{u} \cdot \nabla = U_i \partial/\partial \xi_i$, $\nabla = \nabla \xi_i \partial/\partial \xi_i$ であるから, 容易に一般曲線座標系の式に書換えることができ次のようになる .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} + \rho \nabla \xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.31a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\rho} \nabla \xi_i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.31b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} + \rho c^2 \nabla \xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.31c)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.31d)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.31e)$$

この方程式系から 1 つの空間次元の部分のみを取り出せば次式が得られる .

$$\frac{\partial \hat{q}^*}{\partial t} + \hat{A}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.32a)$$

ただし

$$\hat{q}^* = q^* = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \\ k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_i^* = \begin{pmatrix} U_i & \xi_{i,1}\rho & \xi_{i,2}\rho & \xi_{i,3}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i & 0 & 0 & \xi_{i,1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_i & 0 & \xi_{i,2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i & \xi_{i,3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i,1}\rho c^2 & \xi_{i,2}\rho c^2 & \xi_{i,3}\rho c^2 & U_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i \end{pmatrix} \quad (18.32b)$$

非保存形方程式 (18.32) は保存形方程式 (18.30) の左から $\partial \hat{q}^*/\partial \hat{q} = N/J$ を演算することによって得ることもできる . $d\hat{q}^* = (\partial \hat{q}^*/\partial \hat{q})d\hat{q} = (N/J)d\hat{q}$.

式 (18.32) は双曲型で, 行列 \hat{A}_i^* は対角化することができ, 特性の理論により常微分方程式の系に変換できる . 行列 \hat{A}_i^* は多くの 0 要素を含むので容易に対角化でき, これをもとに \hat{A}_i も対角化できる .

$$\hat{A}_i = N^{-1} \hat{A}_i^* N = N^{-1} \hat{R}_i^* \hat{A}_i \hat{L}_i^* N = \hat{R}_i \hat{A}_i \hat{L}_i \quad (18.33)$$

行列 \hat{A}_i^* の固有値と固有ベクトルはデカルト座標系の場合と同様の方法で求めることができる . その固有値は $\hat{\lambda}_{i1} = U_i$ (5 重根), $\hat{\lambda}_{i2} = U_i + \sqrt{g^{11}}c$, $\hat{\lambda}_{i3} = U_i - \sqrt{g^{11}}c$ となる . $g^{ij} = \xi_{i,k}\xi_{j,k}$. 行列 \hat{A}_i の固有値の対角行列, 左右の固有ベクトルの行列は次のようになる .

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} U_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i + \delta_{1i} \sqrt{g^{11}}c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_i + \delta_{2i} \sqrt{g^{22}}c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i + \delta_{3i} \sqrt{g^{33}}c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i - \sqrt{g^{11}}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i \end{pmatrix} \quad (18.34a)$$

$$\hat{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i,i} & \delta_{1i}\xi_{1,2} - \delta_{2i}\xi_{2,1} & \delta_{1i}\xi_{1,3} - \delta_{3i}\xi_{3,1} & \delta_{1i}\sqrt{g^{11}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2i}\xi_{2,1} - \delta_{1i}\xi_{1,2} & \xi_{i,i} & \delta_{2i}\xi_{2,3} - \delta_{3i}\xi_{3,2} & \delta_{2i}\sqrt{g^{22}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{3i}\xi_{3,1} - \delta_{1i}\xi_{1,3} & \delta_{3i}\xi_{3,2} - \delta_{2i}\xi_{2,3} & \xi_{i,i} & \delta_{3i}\sqrt{g^{33}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{i,1} & \xi_{i,2} & \xi_{i,3} & -\sqrt{g^{ii}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N \quad (18.34b)$$

$$\hat{R}_i = N^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta_{1i}\rho}{2\sqrt{g^{11}}c} & \frac{\delta_{2i}\rho}{2\sqrt{g^{22}}c} & \frac{\delta_{3i}\rho}{2\sqrt{g^{33}}c} & -\frac{\rho}{2\sqrt{g^{ii}}c} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_1 & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i}-1\right)\frac{\xi_{i,1}\xi_{i,2}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i}-1\right)\frac{\xi_{i,1}\xi_{i,3}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,1}}{2g^{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i}-1\right)\frac{\xi_{i,2}\xi_{i,1}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \mathbb{D}_2 & \left(\frac{3}{2}\delta_{3i}-1\right)\frac{\xi_{i,2}\xi_{i,3}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \frac{\xi_{i,2}}{2g^{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2}\delta_{1i}-1\right)\frac{\xi_{i,3}\xi_{i,1}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \left(\frac{3}{2}\delta_{2i}-1\right)\frac{\xi_{i,3}\xi_{i,2}}{g^{ii}\xi_{i,i}} & \mathbb{D}_3 & \frac{\xi_{i,3}}{2g^{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_{1i}\rho c}{2\sqrt{g^{11}}} & \frac{\delta_{2i}\rho c}{2\sqrt{g^{22}}} & \frac{\delta_{3i}\rho c}{2\sqrt{g^{33}}} & -\frac{\rho c}{2\sqrt{g^{ii}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.34c)$$

$$\mathbb{D}_j = \left(\frac{3}{2}\delta_{ji}-1\right)\frac{\xi_{i,j}^2}{g^{ii}\xi_{i,i}} + (1-\delta_{ji})\frac{1}{\xi_{i,i}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

式 (18.28) と等価な常微分方程式系は次のようになる .

$$\frac{\hat{L}_i}{J} \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} \right) = \hat{L}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial t} + \hat{A}_i \hat{L}_i^* \frac{\partial \hat{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.35)$$

あるいは

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \rho - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) p = 0, \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i + \sqrt{g^{ii}}c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} U_i + \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i + \sqrt{g^{ii}}c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} p = 0, \quad (j = i) \\ & \xi_{i,i} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) u_j - \xi_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) u_i = 0, \quad (j \neq i) \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_i - \sqrt{g^{ii}}c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} U_i - \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\rho c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - (U_i - \sqrt{g^{ii}}c) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\} p = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) k = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (18.36)$$

これらの式は ξ 空間内の特性曲線 $d\xi_i/dt = U_i$, $d\xi_i/dt = U_i + \sqrt{g^{ii}}c$, $d\xi_i/dt = U_i - \sqrt{g^{ii}}c$ に沿う内微分 $\partial/\partial t + U_i \partial/\partial \xi_i$, $\partial/\partial t + (U_i + \sqrt{g^{ii}}c) \partial/\partial \xi_i$, $\partial/\partial t + (U_i - \sqrt{g^{ii}}c) \partial/\partial \xi_i$ のいずれか 1 つのみを含む常微分方程式で、写像空間の特性曲線に沿って伝播するエントロピー波、圧力波、剪断波、 k の波、 ε の波のいずれかを表している .

18.2.3 一般曲線座標系の質量流束の方程式

一般曲線座標系の質量流束のオイラー方程式とこれに加えられる k と ε の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} J\rho + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J\rho U_i = 0 \quad (18.37a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J\rho U + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J(\rho U U_i + (\nabla \xi_i \cdot \nabla \xi) p) = 0 \quad (18.37b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J e + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho H U_i = 0 \quad (18.37c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J \rho k + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho k U_i = 0 \quad (18.37d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial \xi_i} J \rho \varepsilon U_i = 0 \quad (18.37e)$$

この方程式系から 1 つの空間次元の部分のみを取り出せば次式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.38a)$$

ただし

$$\tilde{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho U_1 U_i + g^{i1} p \\ \rho U_2 U_i + g^{i2} p \\ \rho U_3 U_i + g^{i3} p \\ \rho H U_i \\ \rho k U_i \\ \rho \varepsilon U_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.38b)$$

流束 \tilde{F}_i は \tilde{q} の成分の 1 次の同次式であるから，オイラーの同次関係を用いれば

$$d\tilde{F}_i = \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} = \tilde{A}_i d\tilde{q}, \quad \tilde{F}_i = \tilde{A}_i \tilde{q}, \quad d\tilde{A}_i \tilde{q} = 0 \quad (18.39)$$

となり，式 (18.38) は次のよう線形化できる。

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \tilde{A}_i \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.40a)$$

ただしヤコビ行列 $\tilde{A}_i = \partial \tilde{F}_i / \partial \tilde{q}$ は

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ -U_1 U_i + g^{i1} \phi^2 & \tilde{D}_{i1} & \delta_{2i} U_1 - \tilde{\gamma} g^{i1} \alpha_2 & \delta_{3i} U_1 - \tilde{\gamma} g^{i1} \alpha_3 & \tilde{\gamma} g^{i1} & 0 & 0 \\ -U_2 U_i + g^{i2} \phi^2 & \delta_{1i} U_2 - \tilde{\gamma} g^{i2} \alpha_1 & \tilde{D}_{i2} & \delta_{3i} U_2 - \tilde{\gamma} g^{i2} \alpha_3 & \tilde{\gamma} g^{i2} & 0 & 0 \\ -U_3 U_i + g^{i3} \phi^2 & \delta_{1i} U_3 - \tilde{\gamma} g^{i3} \alpha_1 & \delta_{2i} U_3 - \tilde{\gamma} g^{i3} \alpha_2 & \tilde{D}_{i3} & \tilde{\gamma} g^{i3} & 0 & 0 \\ -H U_i + \phi^2 U_i & \delta_{1i} H - \tilde{\gamma} \alpha_1 U_i & \delta_{2i} H - \tilde{\gamma} \alpha_2 U_i & \delta_{3i} H - \tilde{\gamma} \alpha_3 U_i & \gamma U_i & 0 & 0 \\ -k U_i & \delta_{1i} k & \delta_{2i} k & \delta_{3i} k & 0 & U_i & 0 \\ -\varepsilon U_i & \delta_{1i} \varepsilon & \delta_{2i} \varepsilon & \delta_{3i} \varepsilon & 0 & 0 & U_i \end{pmatrix} \quad (18.40b)$$

$$\tilde{D}_{ij} = U_i + \delta_{ji}U_j - \tilde{\gamma}g^{ji}\alpha_j, \quad \alpha_i = (\partial x_k / \partial \xi_i)u_k = g_{ij}U_j, \quad g_{ij} = (\partial x_k / \partial \xi_i)(\partial x_k / \partial \xi_j).$$

この場合の非保存形方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.41a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{\rho} \nabla \xi_i \cdot \nabla \xi \frac{\partial p}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.41b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} + \rho c^2 \frac{\partial U_i}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.41c)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.41d)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.41e)$$

この方程式系から 1 つの空間次元の部分のみを取り出せば次式が得られる。

$$\frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial t} + \tilde{A}_i^* \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial \xi_i} = 0 \quad (18.42a)$$

ただし

$$\tilde{q}^* = \begin{pmatrix} \rho \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ p \\ k \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_i^* = \begin{pmatrix} U_i & \delta_{1i}\rho & \delta_{2i}\rho & \delta_{3i}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_i & 0 & 0 & g^{i1}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_i & 0 & g^{i2}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i & g^{i3}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{1i}\rho c^2 & \delta_{2i}\rho c^2 & \delta_{3i}\rho c^2 & U_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_i \end{pmatrix} \quad (18.42b)$$

この非保存形方程式 (18.42) は，保存形方程式 (18.40) の左から行列 $\partial \tilde{q}^* / \partial \tilde{q} = \tilde{N} / J$ を演算することによっても得られる．保存形から非保存形への変換の行列 $\tilde{N} = J \partial \tilde{q}^* / \partial \tilde{q}$ とその逆行列 \tilde{N}^{-1} は次のようになる．

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ \phi^2 & -\tilde{\gamma}\alpha_1 & -\tilde{\gamma}\alpha_2 & -\tilde{\gamma}\alpha_3 & \tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ -k/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ -\varepsilon/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (18.43a)$$

$$\tilde{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_2 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_3 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{u}^2/2 & \rho\alpha_1 & \rho\alpha_2 & \rho\alpha_3 & 1/\tilde{\gamma} & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (18.43b)$$

なお $d\tilde{q}^* = (\partial\tilde{q}^*/\partial\tilde{q})d\tilde{q} = (\tilde{N}/J)d\tilde{q}$.

行列 \tilde{A}_i^* は簡単で容易に対角化でき、これより \tilde{A}_i も対角化できる .

$$\tilde{A}_i = \tilde{N}^{-1}\tilde{A}_i^*\tilde{N} = \tilde{N}^{-1}\tilde{R}_i^*\tilde{\Lambda}_i\tilde{L}_i^*\tilde{N} = \tilde{R}_i\tilde{\Lambda}_i\tilde{L}_i \quad (18.44)$$

行列 \tilde{A}_i の固有値の対角行列 $\tilde{\Lambda}_i$, その左固有ベクトルの行列 \tilde{L}_i , 右固有ベクトルの行列 $\tilde{R}_i = \tilde{L}_i^{-1}$ は次のようになる .

$$\tilde{\Lambda}_i = \hat{\Lambda}_i \quad (18.45a)$$

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_{2i}g^{12}/g^{22} & -\delta_{3i}g^{13}/g^{33} & \delta_{1i}\sqrt{g^{11}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i}g^{21}/g^{11} & 1 & -\delta_{3i}g^{23}/g^{33} & \delta_{2i}\sqrt{g^{22}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i}g^{31}/g^{11} & -\delta_{2i}g^{32}/g^{22} & 1 & \delta_{3i}\sqrt{g^{33}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} & -\sqrt{g^{ii}}/\rho c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{N} \quad (18.45b)$$

$$\tilde{R}_i = \tilde{N}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \delta_{1i}\rho/2\sqrt{g^{11}}c & \delta_{2i}\rho/2\sqrt{g^{22}}c & \delta_{3i}\rho/2\sqrt{g^{33}}c & -\rho/2\sqrt{g^{ii}}c & 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta_{1i}/2 & \delta_{2i}g^{12}/2g^{22} & \delta_{3i}g^{13}/2g^{33} & g^{1i}/2g^{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{1i}g^{21}/2g^{11} & 1-\delta_{2i}/2 & \delta_{3i}g^{23}/2g^{33} & g^{2i}/2g^{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{1i}g^{31}/2g^{11} & \delta_{2i}g^{32}/2g^{22} & 1-\delta_{3i}/2 & g^{3i}/2g^{ii} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{1i}\rho c/2\sqrt{g^{11}} & \delta_{2i}\rho c/2\sqrt{g^{22}} & \delta_{3i}\rho c/2\sqrt{g^{33}} & -\rho c/2\sqrt{g^{ii}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.45c)$$

式 (18.38) と等価な常微分方程式系は次のようになる .

$$\frac{\tilde{L}_i}{J} \left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial\xi_i} \right) = \tilde{L}_i^* \frac{\partial\tilde{q}^*}{\partial t} + \tilde{\Lambda}_i\tilde{L}_i^* \frac{\partial\tilde{q}^*}{\partial\xi_i} = 0 \quad (18.46)$$

なおこの式は、常微分方程式系に書き替えれば当然のことながら式 (18.36) になり、写像空間の特性曲線に沿って伝播するエントロピー波、圧力波、剪断波、 k と ε の波の式である .

18.3 △形陰解法

Euler 方程式は，前述のように特性の理論によりいくつかの波の常微分方程式に変換することができ，その数値スキームでは安定化のため流束分離法が用いられこれらの波ごとに上流化が行われる．またその安定性はこれらの波の伝播に対して定義される Courant 数 $CFL = \max|\lambda_i \Delta t / \Delta x_i|$ または $= \max|\hat{\lambda}_i \Delta t / \Delta \xi_i|$ を基に評価される．壁乱流の計算では，壁面に隣接する格子点は，壁法則を併用するときには $y^+ > 40$ の慣性域内に取りられるが，代数モデルや低レイノルズ数型モデルでは粘性底層内の $y^+ = 1 \sim 4$ に取られなければならない．また壁に垂直方向の速度 λ_i は圧力波の伝播速度である音速になる．したがって，圧縮性乱流では壁近傍で Courant 数の制約が非常にきびしいものになり，陰解法が安定性と計算効率の点から適している．

デカルト座標系のナビエ・ストークス方程式 (18.8) と Chien の 2 方程式モデルの式 (18.14) に対する △形陰解法 (delta-form implicit method) の式は次のようになる．

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i^n + D_i) \right\} \Delta q^n = rhs^n, \quad (18.47a)$$

$$rhs = -\Delta t \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + D + g \right), \quad q^{n+1} = q^n + \Delta q^n$$

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i^n + D_i) \right\} \Delta q^{(m)} = -(q^{(m-1)} - q^n) + \frac{1}{2} (rhs^n + rhs^{(m-1)}), \quad (18.47b)$$

$$q^{(m)} = q^{(m-1)} + \Delta q^{(m)}$$

ただし

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i} P \\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i} P \\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i} P \\ \rho H u_i \\ \rho k u_i \\ \rho \varepsilon u_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.47c)$$

$$D = -\frac{\partial}{\partial x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \\ (\mu + \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \\ (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad g = - \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_i u_i \\ P - \rho \varepsilon - \rho D \\ \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P - c_2 f \rho \varepsilon - f_3 \rho D) \end{pmatrix}$$

$\partial(D_i \Delta q^n) / \partial x_i$ は拡散項の主要部，また左辺の演算子 $\partial / \partial x_i$ は Δq^n にも作用していることに注意すべきである．

定常流の場合には式 (18.47a) が用いられる．この式の右辺は残差， Δq^n はその修正値を意味する．解が定常流に漸近すれば，残差は零に近づき，修正値も零に近づく．したがって左辺の演算子は解の精度

には無関係で，安定性と計算の容易さを考慮して，1次上流差分が用いられ，拡散項が適当に省略され，近似因子法が適用される．他方 右辺は解の精度に直接関係するので，次節以降に述べるような高次のスキームを用い正確に計算される．非定常流の場合には，各時間ステップごとに式 (18.47b) により反復計算が行われる．この式は時間間隔 Δt における修正値を2つに分け， $\Delta q^n = (q^{(m-1)} - q^n) + \Delta q^{(m)}$ ，既知の部分 $q^{(m-1)} - q^n$ は陽的に，未知の部分 $\Delta q^{(m)}$ は陰的に扱うものである．この反復計算は数回で十分収束する．

また一般曲線座標系のナビエ・ストークス方程式 (18.10) と Chien の2方程式モデルの式 (18.14) に対する Δ 形陰解法の式は次のようになる．

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{A}_i^n + \tilde{D}_i) \right\} \Delta \tilde{q}^n = \widetilde{rhs}^n, \quad (18.48a)$$

$$\widetilde{rhs} = -\Delta t B \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \xi_i} + \hat{D} + \hat{g} \right), \quad \tilde{q}^{n+1} = \tilde{q}^n + \Delta \tilde{q}^n$$

$$\left\{ I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{A}_i^n + \tilde{D}_i) \right\} \Delta \tilde{q}^{(m)} = -(\tilde{q}^{(m-1)} - \tilde{q}^n) + \frac{1}{2} (\widetilde{rhs}^n + \widetilde{rhs}^{(m-1)}), \quad (18.48b)$$

$$\tilde{q}^{(m)} = \tilde{q}^{(m-1)} + \Delta \tilde{q}^{(m)}$$

ただし

$$\tilde{q} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho U_3 \\ e \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_i = J \begin{pmatrix} \rho U_i \\ \rho u_1 U_i + \xi_{i,1} p \\ \rho u_2 U_i + \xi_{i,2} p \\ \rho u_3 U_i + \xi_{i,3} p \\ \rho H U_i \\ \rho k U_i \\ \rho \varepsilon U_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18.48c)$$

$$\hat{D} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} J \xi_{i,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{j1} \\ \tau_{j2} \\ \tau_{j3} \\ \tau_{jk} u_k - q_j \\ \xi_{k,j} (\mu + \mu_t) \partial k / \partial \xi_k \\ \xi_{k,j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \partial \varepsilon / \partial \xi_k \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = -J \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_k u_k \\ P - \rho \varepsilon - \rho D \\ \frac{\varepsilon}{k} (c_1 P - c_2 f \rho \varepsilon - f_3 \rho D) \end{pmatrix}$$

この場合にも上と同様のことが言える．